2021학년도 대학수학능력시험
수학영역 가형 정답 및 풀이

*최종 수정일 : 22.02.28

01. ③	02. ②	03. ①	04. ④	05. ⑤
06. ②	07. ①	08. ②	09. ④	10. ②
11. ①	12. ④	13. ③	14. ③	15. ②
16. ⑤	17. ③	18. ③	19. ⑤	20. ⑤
21. ②	22. 15	23. 8	24. 60	25. 160
26. 36	27. 13	28. 72	29. 201	30. 29

1. **출제의도** : 지수의 성질을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\sqrt[3]{9}\times 3^{\frac{1}{3}}=(3^2)^{\frac{1}{3}}\times(3^{\frac{1}{3}})=3^{\frac{2}{3}+\frac{1}{3}}=3$$

정답 ③

2. **출제의도** : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{4n^2+2n+1}-2n}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{(\sqrt{4n^2+2n+1})^2-(2n)^2}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{4n^2+2n+1}+2n}{2n+1}$$
$$=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{1+\frac{1}{2n}+\frac{1}{4n^2}}+1}{1+\frac{1}{2n}}$$
$$=2$$

정답 ②

3. **출제의도** : 삼각함수의 성질을 이용하여 삼각함수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$이고 $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$이므로

$$\cos\theta=-\sqrt{1-\left(\frac{\sqrt{21}}{7}\right)^2}=-\frac{2\sqrt{7}}{7}$$

따라서

$$\tan\theta=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\frac{\frac{\sqrt{21}}{7}}{-\frac{2\sqrt{7}}{7}}=-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

정답 ①

4. **출제의도** : 조건부 확률의 성질을 이용하여 확률의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(B\cap A)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{1}{4}$$

이므로

$\mathrm{P}(A)=4\mathrm{P}(A\cap B)$

또,

$$\mathrm{P}(A|B)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(B)}=\frac{1}{3}$$

이므로

$\mathrm{P}(B)=3\mathrm{P}(A\cap B)$

즉,

$$\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(B)=4\mathrm{P}(A\cap B)+3\mathrm{P}(A\cap B)$$
$$=7\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{7}{10}$$

따라서

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{10}$$

정답 ④

5. 출제의도 : 지수부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(\frac{1}{9}\right)^{x} < 3^{21-4x}$에서

$3^{-2x} < 3^{21-4x}$

$-2x < 21-4x$

$2x < 21$

$x < \frac{21}{2}$

따라서 자연수 x는 1, 2, ⋯, 10이므로 그 개수는 10이다.

정답 ⑤

6. 출제의도 : 표본평균의 분포를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

정규분포 $\mathrm{N}(20,\ 5^2)$을 따르는 확률변수를 X라 하면

$\mathrm{E}(X)=20,\ \sigma(X)=5$

이 모집단에서 크기가 16인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이 $\overline{X}$이므로

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(\overline{X})+\sigma(\overline{X}) &= \mathrm{E}(X)+\frac{\sigma(X)}{\sqrt{16}} \\ &= 20+\frac{5}{4} \\ &= \frac{85}{4}\end{aligned}$$

정답 ②

7. 출제의도 : 곱의 미분법을 이용하여 함수의 극댓값과 극솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=e^x(x^2-2x-7)$

에서

$$\begin{aligned}f'(x) &= e^x(x^2-2x-7)+e^x(2x-2) \\ &= e^x(x^2-9) \\ &= e^x(x+3)(x-3)\end{aligned}$$

이므로 함수 $f(x)$의 증가, 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-3	$\cdots$	3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	극대	↘	극소	↗

따라서

$a=f(-3)=e^{-3}\times 8$

$b=f(3)=e^3\times(-4)$

이므로

$a\times b=-32$

정답 ①

8. 출제의도 : 정적분을 이용하여 곡선과 두 직선 및 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\int_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} e^{2x}dx &= \left[\frac{1}{2}e^{2x}\right]_{\ln\frac{1}{2}}^{\ln 2} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{2\ln 2}-e^{2\ln\frac{1}{2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{\ln 4}-e^{\ln\frac{1}{4}}\right)\end{aligned}$$

$= \frac{1}{2}\left(4 - \frac{1}{4}\right)$

$= \frac{15}{8}$

정답 ②

9. **출제의도** : 순열의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

9장의 카드를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$9!$

문자 A가 적혀 있는 카드의 바로 양옆에 숫자가 적혀 있는 카드를 나열하는 경우의 수는

${}_4P_2 = 12$

이 각각에 대하여 나머지 카드 6장과 함께 나열하는 경우의 수는

$7!$

따라서 구하는 확률은

$\frac{12 \times 7!}{9!} = \frac{1}{6}$

정답 ④

10. **출제의도** : 사인법칙과 코사인법칙을 활용하여 삼각형의 한 변의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

삼각형 ABC의 외접원의 반지름의 길이가 7이므로 사인법칙에 의하여

$\frac{\overline{BC}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2 \times 7$

$\overline{BC} = 7\sqrt{3}$ ……㉠

한편, $\overline{AB} : \overline{AC} = 3:1$이므로

$\overline{AC} = k\ (k>0)$이라 하면 $\overline{AB} = 3k$

이때

$\overline{BC} = \sqrt{\overline{AB}^2 + \overline{AC}^2 - 2\overline{AB} \times \overline{AC} \times \cos\frac{\pi}{3}}$

$= \sqrt{9k^2 + k^2 - 2 \times 3k \times k \times \frac{1}{2}}$

$= \sqrt{7k^2}$

$= \sqrt{7}\,k$ ……㉡

㉠과 ㉡에서

$7\sqrt{3} = \sqrt{7}\,k$

$k = \sqrt{21}$

따라서

$\overline{AC} = k = \sqrt{21}$

정답 ②

11. **출제의도** : 정적분의 성질을 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3n}{3n+k}}$

$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{3}{3+\frac{k}{n}}}$

$= \int_3^4 \sqrt{\frac{3}{x}}\,dx$

$= \sqrt{3}\int_3^4 x^{-\frac{1}{2}}\,dx$

$= \sqrt{3}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_3^4$

$= 2\sqrt{3}(2 - \sqrt{3})$

$= 4\sqrt{3} - 6$

정답 ①

12. **출제의도** : 정규분포에서 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 X가 정규분포 $\mathrm{N}(8,\ 3^2)$을 따르고 확률변수 Y가 정규분포 $\mathrm{N}(m,\ \sigma^2)$을 따르므로

$\mathrm{P}(4 \le X \le 8)+\mathrm{P}(Y \ge 8)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{4-8}{3} \le \frac{X-8}{3} \le \frac{8-8}{3}\right)$

$+\mathrm{P}\left(\frac{Y-m}{\sigma} \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(-\frac{4}{3} \le Z \le 0\right)+\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}\left(0 \le Z \le \frac{4}{3}\right)+\mathrm{P}\left(Z \ge \frac{8-m}{\sigma}\right)$

$=\frac{1}{2}$

그러므로

$\frac{8-m}{\sigma}=\frac{4}{3}$

$m=8-\frac{4}{3}\sigma$

따라서

$\mathrm{P}\left(Y \le 8+\frac{2\sigma}{3}\right)$

$=\mathrm{P}\left(\frac{Y-\left(8-\frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma} \le \frac{8+\frac{2\sigma}{3}-\left(8-\frac{4\sigma}{3}\right)}{\sigma}\right)$

$=\mathrm{P}(Z \le 2)$

$=\frac{1}{2}+\mathrm{P}(0 \le Z \le 2)$

$=0.5+0.4772$

$=0.9772$

정답 ④

13. **출제의도** : 로그함수의 그래프를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. 점 A의 x좌표는

$\log_a x=1$

$x=a$

이므로 $\mathrm{A}(a,\ 1)$

또, 점 B의 x좌표는

$\log_{4a} x=1$

$x=4a$

이므로 $\mathrm{B}(4a,\ 1)$

그러므로 선분 AB를 $1:4$로 외분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{1\times 4a-4\times a}{1-4},\ \frac{1\times 1-4\times 1}{1-4}\right)$

즉, $(0,\ 1)$ (참)

ㄴ. 사각형 ABCD가 직사각형이면 선분 AB가 x축과 평행하므로 두 점 A, D의 x좌표는 같아야 한다.

한편 점 D의 x좌표는

$\log_{4a} x=-1$

$x=\frac{1}{4a}$

이므로 $\mathrm{D}\left(\frac{1}{4a},\ -1\right)$

이때 $\mathrm{A}(a,\ 1)$이므로

$a=\frac{1}{4a}$

$a^2=\frac{1}{4}$

이때 $\frac{1}{4}<a<1$이므로

$a=\frac{1}{2}$ (참)

ㄷ. $\overline{\mathrm{AB}}=4a-a=3a$

한편, 점 C의 x좌표는

$\log_a x = -1$

$x = \dfrac{1}{a}$

이므로

$C\left(\dfrac{1}{a}, \ -1\right)$

그러므로

$\overline{CD} = \dfrac{1}{a} - \dfrac{1}{4a} = \dfrac{3}{4a}$

한편, $\overline{AB} < \overline{CD}$이면

$3a < \dfrac{3}{4a}$

$a^2 < \dfrac{1}{4}$

이때 $\dfrac{1}{4} < a < 1$이므로

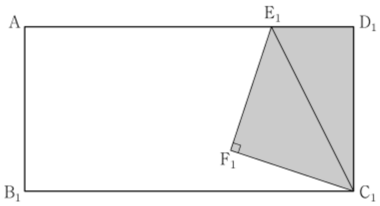
$\dfrac{1}{4} < a < \dfrac{1}{2}$ (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ③

14. 출제의도 : 등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



직각삼각형 $C_1D_1E_1$에서

$\overline{D_1E_1} = 1$, $\overline{C_1D_1} = 2$

이므로

$\overline{C_1E_1} = \sqrt{1^2 + 2^2} = \sqrt{5}$

직각삼각형 $C_1E_1F_1$에서

$\overline{C_1F_1} = \overline{E_1F_1}$이므로

$\overline{C_1F_1}^2 + \overline{E_1F_1}^2 = 5$

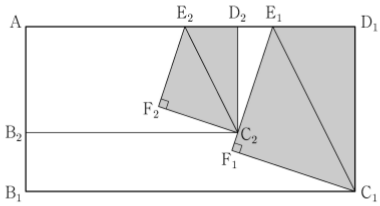
$2\overline{C_1F_1}^2 = 5$

$\overline{C_1F_1} = \overline{E_1F_1} = \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$S_1 = \triangle C_1D_1E_1 + \triangle C_1E_1F_1$

$= \dfrac{1}{2} \times 2 \times 1 + \dfrac{1}{2} \times \dfrac{\sqrt{10}}{2} \times \dfrac{\sqrt{10}}{2}$

$= \dfrac{9}{4}$



$\angle C_1E_1D_1 = \theta$라 하면 $\angle F_1E_1D_2 = \dfrac{3}{4}\pi - \theta$

이고, $\tan\theta = 2$이므로

$\tan(\angle F_1E_1D_2) = \tan\left(\dfrac{3}{4}\pi - \theta\right)$

$= \dfrac{\tan\dfrac{3}{4}\pi - \tan\theta}{1 + \tan\dfrac{3}{4}\pi\tan\theta}$

$= \dfrac{(-1) - 2}{1 + (-1) \times 2}$

$= 3$

이때 $\overline{C_2D_2} = k$라 하면 $\overline{D_2E_1} = 3 - 2k$이고

$\tan(\angle F_1E_1D_2) = \dfrac{k}{3 - 2k}$

이므로

$\dfrac{k}{3 - 2k} = 3$

$k = \dfrac{9}{7}$

두 사각형 $AB_1C_1D_1$, $AB_2C_2D_2$의 닮음비가

$2:\frac{9}{7}$, 즉 $1:\frac{9}{14}$이므로

두 사각형 $C_1D_1E_1F_1$, $C_2D_2E_2F_2$의 넓이의 비는

$1:\left(\frac{9}{14}\right)^2$ 이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \frac{\frac{9}{4}}{1-\left(\frac{9}{14}\right)^2} = \frac{441}{115}$$

정답 ③

15. **출제의도** : 여러 가지 함수의 부정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x) = 2 - \frac{3}{x^2}$

에서

$f(x) = 2x + \frac{3}{x} + C_1$ (단, C_1은 적분상수)

이때 $f(1) = 5$이므로

$2 + 3 + C_1 = 5$

$C_1 = 0$

즉, $f(x) = 2x + \frac{3}{x}$

한편, $x < 0$에서 $g'(x) = f'(-x) = 2 - \frac{3}{x^2}$

이므로

$g(x) = 2x + \frac{3}{x} + C_2$ (단, C_2는 적분상수)

이때 $f(2) + g(-2) = 9$이므로

$\left(4 + \frac{3}{2}\right) + \left(-4 - \frac{3}{2} + C_2\right) = 9$

$C_2 = 9$

즉, $g(x) = 2x + \frac{3}{x} + 9$

따라서

$g(-3) = -6 - 1 + 9 = 2$

정답 ②

16. **출제의도** : 지수함수의 성질과 등차수열의 일반항을 이용하여 구하는 과정에서 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{A_3}{A_1} = \frac{\frac{1}{2}(a_4 - a_3)(2^{a_4} - 2^{a_3})}{\frac{1}{2}(a_2 - a_1)(2^{a_2} - 2^{a_1})}$$

$$= \frac{\frac{1}{2} \times d \times (2^{1+3d} - 2^{1+2d})}{\frac{1}{2} \times d \times (2^{1+d} - 2)}$$

$$= 2^{2d}$$

이므로

$\frac{A_3}{A_1} = 16$에서

$2^{2d} = 16$

$d = \boxed{2}$

수열 $\{a_n\}$의 일반항은

$a_n = 1 + (n-1)d$

$= 1 + (n-1) \times 2$

$= \boxed{2n-1}$

그러므로 모든 자연수 n에 대하여

$A_n = \frac{1}{2} \times 2 \times \left(2^{2n+1} - 2^{2n-1}\right)$

$= \boxed{3 \times 2^{2n-1}}$

따라서

$p = 2$, $f(n) = 2n - 1$, $g(n) = 3 \times 2^{2n-1}$

이므로

$$p+\frac{g(4)}{f(2)}=2+\frac{3\times 2^7}{3}=130$$

정답 ⑤

17. 출제의도 : 이항분포에서 확률변수의 기댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위를 15번 던져서 2 이하의 눈이 나오는 횟수를 확률변수 Y라 하면 확률변수 Y는 이항분포 $\mathrm{B}\left(15,\ \frac{1}{3}\right)$을 따르므로

$$\mathrm{E}(Y)=15\times\frac{1}{3}=5$$

이때 원점에 있던 점 P가 이동된 점의 좌표는

$(3Y,\ 15-Y)$

이고, 이 점과 직선 $3x+4y=0$ 사이의 거리 X는

$$X=\frac{|3\times 3Y+4\times(15-Y)|}{\sqrt{3^2+4^2}}$$

$$=\frac{|5Y+60|}{5}=Y+12$$

이다.

따라서

$$\begin{aligned}\mathrm{E}(X)&=\mathrm{E}(Y+12)\\&=\mathrm{E}(Y)+12\\&=5+12\\&=17\end{aligned}$$

정답 ③

18. 출제의도 : 극한으로 나타내어진 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(ⅰ) $|x|>1$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}\\&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x+\frac{2}{x^{2n-1}}}{3+\frac{1}{x^{2n}}}\\&=\frac{a-2}{3}x\end{aligned}$$

(ⅱ) $|x|<1$일 때,

$$\begin{aligned}f(x)&=\lim_{n\to\infty}\frac{(a-2)x^{2n+1}+2x}{3x^{2n}+1}\\&=2x\end{aligned}$$

(ⅲ) $x=1$일 때

$$f(1)=\frac{a}{4}$$

(ⅳ) $x=-1$일 때

$$f(-1)=-\frac{a}{4}$$

(ⅰ)~(ⅳ)에서

$f(1)=\frac{a}{4}$이므로

$$(f\circ f)(1)=f(f(1))=f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{5}{4}$$

(가) $\left|\frac{a}{4}\right|>1$, 즉 $|a|>4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=\frac{a-2}{3}\times\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$에서

$$a^2-2a-15=0$$

$$(a-5)(a+3)=0$$

$$a=5$$

(나) $\left|\frac{a}{4}\right|<1$, 즉 $|a|<4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=2\times\frac{a}{4}=\frac{5}{4}$에서

$$a=\frac{5}{2}$$

(다) $\frac{a}{4}=1$, 즉 $a=4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(1)=1\neq\frac{5}{4}$

(라) $\frac{a}{4}=-1$, 즉 $a=-4$일 때,

$f\left(\frac{a}{4}\right)=f(-1)=1\neq\frac{5}{4}$

(가)~(라)에서

$a=5$ 또는 $a=\frac{5}{2}$

따라서 모든 a의 값의 합은

$5+\frac{5}{2}=\frac{15}{2}$

정답 ③

19. **출제의도** : 독립일 때의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

다음 각 경우로 나눌 수 있다.

(i) 꺼낸 공의 수가 3인 경우

주머니에서 꺼낸 공의 수가 3일 확률은

$\frac{2}{5}$ ……㉠

이때 주사위를 3번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 3, 1 또는 6, 2, 2

또는 5, 4, 1 또는 5, 3, 2

또는 4, 4, 2 또는 4, 3, 3

이때의 확률은

$\left(3!+\frac{3!}{2!1!}+3!+3!+\frac{3!}{2!1!}+\frac{3!}{2!1!}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^3$

$=\frac{1}{8}$ ……㉡

㉠과 ㉡에서 확률은

$\frac{2}{5}\times\frac{1}{8}=\frac{1}{20}$

(ii) 꺼낸 공의 수가 4인 경우

주머니에서 꺼낸 공의 수가 4일 확률은

$\frac{3}{5}$ ……㉢

이때 주사위를 4번 던져 나오는 눈의 수의 합이 10인 경우는 순서를 생각하지 않으면

6, 2, 1, 1 또는 5, 3, 1, 1

또는 5, 2, 2, 1 또는 4, 4, 1, 1

또는 4, 3, 2, 1 또는 4, 2, 2, 2

또는 3, 3, 3, 1 또는 3, 3, 2, 2

이때의 확률은

$$\left(\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!1!1!}+\frac{4!}{2!2!}+4!+\right.$$
$$\left.+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{3!1!}+\frac{4!}{2!2!}\right)\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$$

$=80\times\left(\frac{1}{6}\right)^4$ ……㉣

㉢과 ㉣에서 확률은

$\frac{3}{5}\times80\times\left(\frac{1}{6}\right)^4=\frac{1}{27}$

(i), (ii)에서 구하는 확률은

$\frac{1}{20}+\frac{1}{27}=\frac{47}{540}$

정답 ⑤

20. **출제의도** : 부분적분을 이용하여 정적분을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $h(x)=f(nx)g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이고 함수 $g(x)$의 치역이 $\{0,\ 1\}$이다.

한편, 구간 $[-1, 1]$에서 함수 $f(nx)$의 함숫값이 0이 되는 x의 값은

$x=\frac{k}{2n}$ (k는 $-2n$ 이상 $2n$ 이하의 정수)

그러므로 함수 $g(x)$는 어떤 정수 k에 대하여 구간 $\left[\frac{k}{2n}, \frac{k+1}{2n}\right]$에서 0이어야 한다.

한편,

$$\int_0^{\frac{1}{2n}} f(nx)dx = \int_0^{\frac{1}{2n}} \pi \sin 2n\pi x dx$$

$$= \left[-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right]_0^{\frac{1}{2n}}$$

$$= \frac{1}{2n} - \left(-\frac{1}{2n}\right)$$

$$= \frac{1}{n}$$

이므로 $f(x) \geq 0$인 구간에서 함수 $f(nx)$의 정적분은

$\frac{1}{n} \times n \times 2 = 2$

그러므로 $\int_{-1}^{1} h(x)dx = 2$이기 위해서는

함수 $g(x)$는

$$g(x)=\begin{cases}1 & (f(nx)>0)\\ 0 & (f(nx)\leq 0)\end{cases}$$

한편, 함수 $k(x)=xf(nx)$라 하면

$$k(-x) = -xf(-nx)$$

$$= -x\pi \sin(2n\pi(-x))$$

$$= x\pi \sin 2n\pi x$$

즉, 함수 $y=k(x)$는 y축 대칭이다.

그러므로

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx$$

$$= \int_0^1 xf(nx)dx$$

$$= \int_0^1 x\pi \sin 2n\pi x dx$$

$$= \left[-\frac{x}{2n}\cos 2n\pi x\right]_0^1 - \int_0^1 \left(-\frac{1}{2n}\cos 2n\pi x\right)dx$$

$$= \left(-\frac{1}{2n}\right) + \frac{1}{2n} \times \left[\frac{1}{2n\pi}\sin 2n\pi x\right]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2n} = -\frac{1}{32}$$

따라서 $n=16$

정답 ⑤

[참조]

함수 $y=xf(nx)$는 y축 대칭이므로

$\int_{-a}^{-b} xf(nx)dx = \int_b^a xf(nx)dx$ 이다.

이때,

$$\int_{-1}^{1} xh(x)dx$$

$$= \int_{-\frac{2n}{2n}}^{-\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx + \int_{-\frac{2n-2}{2n}}^{-\frac{2n-3}{2n}} xf(nx)dx + \cdots + \int_0^{\frac{1}{2n}} xf(nx)dx + \int_{\frac{2}{2n}}^{\frac{3}{2n}} xf(nx)dx + \cdots + \int_{\frac{2n-2}{2n}}^{\frac{2n-1}{2n}} xf(nx)dx$$

$$= \int_0^1 xf(nx)dx$$

21. **출제의도** : 귀납적으로 정의된 수열의 항을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$a_4 = (a_2)^2 + 1$$

$$a_8 = a_2 \times a_4 + 1$$

$$= a_2 \times \{(a_2)^2 + 1\} + 1$$

$$= (a_2)^3 + a_2 + 1$$

조건 (나)에서

$a_3 = a_2 \times a_1 - 2 \quad \cdots\cdots$ ㉠

조건 (가)에서

$a_2 = a_2 \times a_1 + 1$이므로

$a_2 \times a_1 = a_2 - 1 \quad \cdots\cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a_3 = a_2 - 3$

또,

$a_7 = a_2 \times a_3 - 2$

$= a_2 \times (a_2 - 3) - 2$

$= (a_2)^2 - 3a_2 - 2$

$a_{15} = a_2 \times a_7 - 2$

$= a_2 \times \{(a_2)^2 - 3a_2 - 2\} - 2$

$= (a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2$

이때, $a_8 - a_{15} = 63$이므로

$\{(a_2)^3 + a_2 + 1\}$

$-\{(a_2)^3 - 3(a_2)^2 - 2a_2 - 2\} = 63$

$(a_2)^2 + a_2 - 20 = 0$

$(a_2 + 5)(a_2 - 4) = 0$

$a_2 = -5$ 또는 $a_2 = 4$

(ⅰ) $a_2 = -5$일 때,

㉡에서

$a_1 = \frac{6}{5}$

이므로 주어진 조건을 만족시키지 않는다.

(ⅱ) $a_2 = 4$일 때,

㉡에서

$a_1 = \frac{3}{4}$

이므로 주어진 조건을 만족시킨다.

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_1 = \frac{3}{4}$, $a_2 = 4$

따라서 $a_8 = 69$이므로

$$\frac{a_8}{a_1} = \frac{69}{\frac{3}{4}} = 92$$

정답 ②

22. **출제의도** : 이항정리를 이용하여 이항계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\left(x + \frac{3}{x^2}\right)^5$의 전개식의 일반항은

$${}_5\mathrm{C}_r x^{5-r}\left(\frac{3}{x^2}\right)^r = {}_5\mathrm{C}_r 3^r x^{5-3r}$$

x^2항은 $5 - 3r = 2$, 즉 $r = 1$일 때이므로

x^2의 계수는

${}_5\mathrm{C}_1 \times 3 = 5 \times 3 = 15$

정답 15

23. **출제의도** : 몫의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 6}{x - 1}$$

에서

$$f'(x) = \frac{(2x-2)(x-1) - (x^2 - 2x - 6)}{(x-1)^2}$$

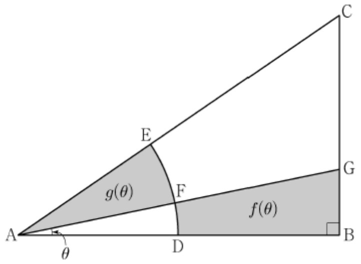
따라서

$$f'(0) = \frac{(-2)\times(-1) - (-6)}{(-1)^2} = 8$$

정답 8

24. **출제의도** : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타낸 후, 삼각함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



부채꼴 AFE에서

$\angle\mathrm{EAF}=2\theta$이므로

$$g(\theta)=\frac{1}{2}\times 1^2\times 2\theta=\theta$$

직각삼각형 ABG에서

$\overline{\mathrm{BG}}=2\tan\theta$이므로

$$f(\theta)=\frac{1}{2}\times\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{BG}}-\frac{1}{2}\times 1^2\times\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times 2\times 2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

$$=2\tan\theta-\frac{\theta}{2}$$

따라서

$$40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{f(\theta)}{g(\theta)}$$

$$=40\times\lim_{\theta\to 0+}\frac{2\tan\theta-\frac{\theta}{2}}{\theta}$$

$$=40\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{2\tan\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=40\times\lim_{\theta\to 0+}\left(\frac{2}{\cos\theta}\times\frac{\sin\theta}{\theta}-\frac{1}{2}\right)$$

$$=40\times\left(\frac{2}{1}\times 1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=60$$

정답 60

25. **출제의도** : 등차수열의 합을 이용하여 일반항을 구한 후, 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$$\sum_{k=1}^{5}a_k=55$$

에서

$$\frac{5(6+4d)}{2}=55$$

$d=4$

즉, $a_n=4n-1$이므로

$$\sum_{k=1}^{5}k(a_k-3)=\sum_{k=1}^{5}k(4k-4)$$

$$=4\sum_{k=1}^{5}(k^2-k)$$

$$=4\left(\frac{5\times 6\times 11}{6}-\frac{5\times 6}{2}\right)$$

$$=160$$

정답 160

26. **출제의도** : 원순열의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A, B, C가 아닌 3명을 a, b, c라 하자.

A와 B가 이웃하므로 A와 B를 하나로 놓고 a, b, c와 같이 원형으로 나열하는 경우의 수는

$(4-1)!=3!$

이 각각에 대하여 A와 B의 순서를 바꾸는 경우의 수는

$2!$

이 각각에 대하여 C가 B와 이웃하지 않도록 앉는 경우의 수는

3

따라서 구하는 경우의 수는

$3!\times 2!\times 3=36$

정답 36

27. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\log_4 2n^2 - \frac{1}{2}\log_2 \sqrt{n}$$
$$= \log_4 2n^2 - \log_4 \sqrt{n}$$
$$= \log_4 \frac{2n^2}{\sqrt{n}}$$
$$= \log_4 \left(2n^{\frac{3}{2}}\right)$$

이 값이 40 이하의 자연수가 되려면

$2n^{\frac{3}{2}} = 4^k$ $(k=1, 2, 3, \cdots, 40)$

이어야 한다.

즉, $n = 4^{\frac{2k-1}{3}}$ 에서 $\frac{2k-1}{3}$이 자연수가 되어야 하므로

$k = 2, 5, 8, \cdots, 38$

따라서 조건을 만족시키는 자연수 n의 개수는

13

정답 13

28. **출제의도** : 미분가능성과 음함수의 미분법을 이용하여 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$g^{-1}(x) = k(x)$라 하면

$h(x) = \left(f \circ g^{-1}\right)(x)$
$\quad = f(k(x))$
$\quad = (k(x)-a)(k(x)-b)^2$

이때, 조건 (가)에서 함수 $(x-1)|h(x)|$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하므로

$k(1) - a = 0$

한편, $y = k(x)$는 음함수 $x = y^3 + y + 1$이므로

$1 = y^3 + y + 1$

$y = 0$

그러므로

$a = 0$

이때,

$f(x) = x(x-b)^2$

또, 조건 (나)에서

$h'(3) = 2$

이때,

$h'(x) = f'(k(x)) \times k'(x)$

이므로

$f'(k(3)) \times k'(3) = 2$ ……㉠

한편, $k(3)$의 값은

$3 = y^3 + y + 1$

$(y-1)(y^2+y+2) = 0$

$y = 1$

그러므로

$k(3) = 1$

이때, $f'(x) = (x-b)^2 + 2x(x-b)$이므로

$f'(k(3)) = f'(1)$
$\quad = (1-b)^2 + 2(1-b)$
$\quad = (1-b)(3-b)$

또, $x = y^3 + y + 1$의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$1 = (3y^2+1)\frac{dy}{dx}$$

그러므로

$$k'(3) = \frac{1}{4}$$

㉠에서

$$(1-b)(3-b) \times \frac{1}{4} = 2$$

$b^2-4b+3=8$

$b^2-4b-5=0$

$(b+1)(b-5)=0$

이때, $b>0$이므로

$b=5$

따라서

$f(x)=x(x-5)^2$

이므로

$f(8)=8\times 3^2=72$

정답 72

29. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (나), (다)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우

검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 다른 두 학생에게 흰색 모자 1개씩을 나누어 주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 다음과 같다.

검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 받지 않는 경우 나머지 흰색 모자 4개를 세 학생에게 나누어주는 경우의 수에서 학생 A가 4개를 모두 받는 경우의 수를 빼면 되므로

${}_3H_4-1=14$

검은색 모자를 2개 받은 학생이 흰색 모자를 1개 받는 경우 나머지 흰색 모자 3개를 세 학생에게 나누어주면 되므로

${}_3H_3=10$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times(14+10)=72$

㉡ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받는 경우

검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는

3

이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

2

이 각각에 대하여 검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생에게는 흰색 모자를 나누어주면 안되고, 다른 두 학생에게는 흰색 모자를 1개 이상씩 나누어주어야 한다. 즉, 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는 학생 A가 4개를 모두 받는 한 가지 경우를 제외해야 하므로

${}_3H_4-1=14$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times 2\times 14=84$

(ii) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우

다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

3

다른 두 학생에게 흰색 모자를 1개씩 나누어주고, 검은색 모자를 1개 받은 학생을 제외한 세명의 학생에게 나머지 흰색 모자 4개를 나누어주는 경우의 수는

${}_{3}\mathrm{H}_{4}=15$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times15=45$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$72+84+45=201$

정답 201

[다른 풀이]

조건 (나), (다)에 의하여 학생 A는 검은색 모자를 4개 또는 5개 받아야 하므로 다음과 같이 경우를 나누어 생각할 수 있다.

(i) 학생 A가 검은색 모자를 4개 받는 경우

㉠ 나머지 세 학생 중 한 명의 학생이 검은색 모자를 2개 받는 경우

검은색 모자를 2개 받는 학생을 택하는 경우의 수는 3

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a, 검은색 모자를 2개 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b, 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d라 하면

$a+b+c+d=6$

$(0\le a\le3,\ 0\le b\le1,\ c\ge1,\ d\ge1)$

이어야 한다.

$b=0$인 경우의 수는

$a+c'+d'=4$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 (a, c', d')의 개수에서 $a=4$, $c'=0$, $d'=0$인 1가지 경우를 제외하면 되므로

${}_{3}\mathrm{H}_{4}-1=14$

$b=1$인 경우의 수는

$a+c'+d'=3$

을 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 (a, c', d')의 개수와 같으므로

${}_{3}\mathrm{H}_{3}=10$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times(14+10)=72$

㉡ 나머지 세 학생 중 두 명의 학생이 검은색 모자를 1개씩 받는 경우

검은색 모자를 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생을 정하는 경우의 수는

3

이 각각에 대하여 나머지 두 학생 중에 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

2

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a, 검은색 모자를 1개 받는데 흰색 모자보다 더 많이 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b, 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d라 하면

$b=0$, $a+c+d=6$

$(0\le a\le3,\ c\ge1,\ d\ge1)$

이어야 한다.

이 경우의 수는

$a+c'+d'=4$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 (a, c', d')의 개수에서 $a=4$, $c'=0$, $d'=0$인 1가지 경우를 제외하면 되므로

${}_3\mathrm{H}_4-1=14$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times2\times14=84$

(ⅱ) 학생 A가 검은색 모자를 5개 받는 경우

다른 세 학생 중 검은색 모자를 받는 학생을 정하는 경우의 수는

3

이 각각에 대하여 학생 A가 받는 흰색 모자의 개수를 a, 검은색 모자를 1개 받는 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 b, 나머지 두 학생이 받는 흰색 모자의 개수를 각각 c, d라 하면

$b=0$, $a+c+d=6$

$(0\le a\le4,\ c\ge1,\ d\ge1)$

이어야 한다.

이 경우의 수는

$a+c'+d'=4$

를 만족시키는 음이 아닌 정수 a, c', d'의 모든 순서쌍 (a, c', d')의 개수와 같으므로

${}_3\mathrm{H}_4=15$

그러므로 이 경우의 수는

$3\times15=45$

(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 구하는 경우의 수는

$72+84+45=201$

30. 출제의도 : 합성함수의 미분법을 이용하여 삼차함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}g(1-x)&=f(\sin^2\pi(1-x))\\&=f(\{\sin(\pi-\pi x)\}^2)\\&=f(\sin^2\pi x)\end{aligned}$$

이므로 함수 $y=g(x)$의 그래프는 직선 $x=\frac{1}{2}$에 대하여 대칭이다.

또 ,

$g'(x)=f'(\sin^2\pi x)\times2\sin\pi x\times\pi\cos\pi x$

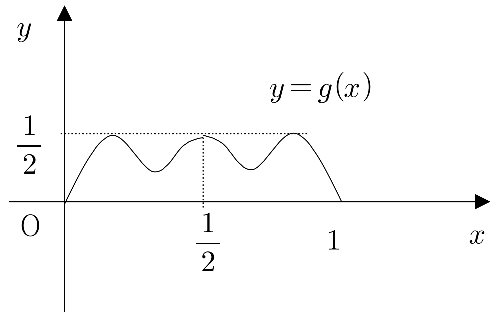
이때, $0<x<1$일 때, $\cos\pi x=0$에서

$x=\frac{1}{2}$

이므로 함수 $g(x)$는 $x=\frac{1}{2}$에서 극값을 가져야 한다.

한편, $0<x<\frac{1}{2}$일 때, $0<\sin^2\pi x<1$이므로 조건 (가)를 만족시키려면 함수 $f(x)$는 $0<x<1$에서 극댓값과 극솟값을 가져야 한다.

또, 조건 (나)에서 함수 $g(x)$의 최댓값이 $\frac{1}{2}$이므로 함수 $f(x)$는 $x=1$에서 $\frac{1}{2}$이어야 한다.



이때, 함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로

$f(x)-\frac{1}{2}=(x-a)^2(x-1)\ (0<a<1)$

이라 놓으면

$$f(x)=(x-a)^2(x-1)+\frac{1}{2}$$

$$\begin{aligned} f'(x)&=2(x-a)(x-1)+(x-a)^2 \\ &=(x-a)(2x-2+x-a) \\ &=(x-a)(3x-a-2) \end{aligned}$$

함수 $f(x)$는 $0 \le x \le 1$에서 최솟값 0을 가져야 하므로 구간 $[0,1]$에서 함수 $f(x)$의 최솟값을 알아보면

(i) $x=a$ 또는 1에서

$$f(a)=f(1)=\frac{1}{2}>0$$

(ii) $x=\frac{a+2}{3}$에서 $0<a<1$이므로

$-1<(a-1)^3<0$이고

$$f\left(\frac{a+2}{3}\right)=\left(\frac{a+2}{3}-a\right)^2\left(\frac{a+2}{3}-1\right)+\frac{1}{2}$$

$$=\frac{4(a-1)^3}{27}+\frac{1}{2}>0$$

(i),(ii)에서 구간 $[0,1]$에서 함수 $f(x)$는 $x=0$에서 최솟값 0을 가진다.

$$f(0)=-a^2+\frac{1}{2}=0$$

따라서 $0<a<1$이므로

$$a=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

그러므로

$$f(x)=\left(x-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2(x-1)+\frac{1}{2}\text{이고}$$

$$\begin{aligned} f(2)&=\left(2-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+\frac{1}{2} \\ &=\left(4-2\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} \\ &=5-2\sqrt{2} \end{aligned}$$

따라서 $a=5$, $b=-2$이므로

$a^2+b^2=5^2+(-2)^2=29$

정답 29