2020학년도 대학수학능력시험

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ②	02. ④	03. ③	04. ⑤	05. ②
06. ④	07. ③	08. ①	09. ①	10. ③
11. ④	12. ①	13. ⑤	14. ③	15. ④
16. ④	17. ①	18. ⑤	19. ①	20. ②
21. ④	22. 63	23. 36	24. 15	25. 91
26. 14	27. 27	28. 7	29. 285	30. 51

1. **출제의도** : 지수법칙을 이용하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$16\times 2^{-3}=2^4\times 2^{-3}=2^{4+(-3)}=2^1=2$

정답 ②

2. **출제의도** : 집합이 서로 같을 조건을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$a+2=3$에서 $a=1$

$b-1=6$에서 $b=7$

따라서 $a+b=1+7=8$

정답 ④

3. **출제의도** : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9n^2+4}}{5n-2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{9+\frac{4}{n^2}}}{5-\frac{2}{n}}$$

$$=\frac{\sqrt{9+0}}{5-0}=\frac{3}{5}$$

정답 ③

4. **출제의도** : 합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(g\circ f)(1)=g(f(1))=g(5)=9$

정답 ⑤

5. **출제의도** : 확률의 성질을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{P}(A^C)=\frac{2}{3}$이므로 $\mathrm{P}(A)=1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$

$A\cup B=A\cup(A^C\cap B)$이고

$A\cap(A^C\cap B)=\varnothing$이므로

$\mathrm{P}(A\cup B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{4}$$

$$=\frac{7}{12}$$

정답 ②

6. **출제의도** : 충분조건의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

조건 p를 만족시키는 x의 값이 조건 q도 만족시켜야 하므로

$3a^2-a^2-32=0$

$a^2=16$

$a>0$이므로 $a=4$

정답 ④

7. **출제의도** : 역함수의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

$f^{-1}(7)=4$에서 $f(4)=7$이므로

$$\frac{k}{4-3}+1=7$$

따라서 $k=6$

정답 ③

8. **출제의도** : 함수의 좌극한과 우극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 그래프에서

$$\lim_{x\to 0+} f(x)=0,\ \lim_{x\to 1-} f(x)=2$$

이므로

$$\lim_{x\to 0+} f(x)-\lim_{x\to 1-} f(x)=0-2=-2$$

정답 ①

9. **출제의도** : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 조사에 참여한 학생 200명 중에서 임의로 선택한 1명이 생태연구를 선택한 학생인 사건을 A, 여학생인 사건을 B라 하면 구하는 확률은 $\mathrm{P}(B|A)$이다.

이때

$$\mathrm{P}(A)=\frac{110}{200}=\frac{11}{20},$$

$$\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{50}{200}=\frac{1}{4}$$

이므로

$$\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}$$

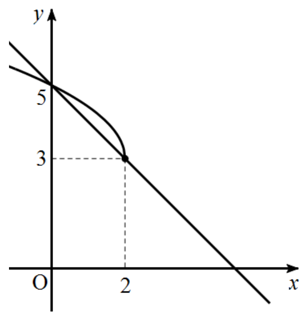
$$=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{11}{20}}=\frac{5}{11}$$

정답 ①

10. **출제의도** : 무리함수의 그래프를 활용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=-x+k$의 역함수는 $y=-x+k$이므로 함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 역함수의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나기 위한 필요충분조건은 함수 $y=\sqrt{4-2x}+3$의 그래프와 직선 $y=-x+k$가 서로 다른 두 점에서 만나는 것이다.



위 그림과 같이 직선 $y=-x+k$가 점 $(2, 3)$을 지날 때, 조건을 만족시키면서 k의 값이 최소가 된다.

따라서 구하는 k의 최솟값은

$3=-2+k$

에서 $k=5$

정답 ③

11. **출제의도** : 정적분의 정의를 이용하여 급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)=\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{n}f\left(\frac{2k}{n}\right)$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2 f(x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^2(4x^3+x)dx$$
$$=\frac{1}{2}\left[x^4+\frac{1}{2}x^2\right]_0^2$$
$$=\frac{1}{2}\times 18=9$$

정답 ④

12. **출제의도** : 도함수를 활용하여 함수가 극댓값을 갖는 x의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=-4x^3+16a^2x$

$=-4x(x^2-4a^2)$

$=-4x(x+2a)(x-2a)$

이므로 함수의 증감을 조사하면 $x=2a$, $x=-2a$에서 극댓값을 갖는다.

즉, $b+(2-2b)=2a+(-2a)=0$이므로

$b=2$

또, $b(2-2b)=2a\times(-2a)$이므로

$-4=-4a^2$

$a>0$이므로 $a=1$

따라서 $a+b=1+2=3$

정답 ①

13. **출제의도** : 표준정규분포표를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 농장에서 수확하는 파프리카 1개의 무게를 X(g)이라 하면 X는 정규분포 $\mathrm{N}(180,\ 20^2)$을 따르고, $Z=\dfrac{X-180}{20}$은 표준정규분포 $\mathrm{N}(0,\ 1)$을 따른다.

따라서 구하는 확률은

$\mathrm{P}(190\le X\le 210)$

$=\mathrm{P}\left(\dfrac{190-180}{20}\le Z\le\dfrac{210-180}{20}\right)$

$=\mathrm{P}(0.5\le Z\le 1.5)$

$=\mathrm{P}(0\le Z\le 1.5)-\mathrm{P}(0\le Z\le 0.5)$

$=0.4332-0.1915$

$=0.2417$

정답 ⑤

14. **출제의도** : 함수의 극한을 이용하여 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)에 의하여

$f(x)g(x)=x^2(2x+a)$ (a는 상수)

로 놓을 수 있다.

조건 (나)에 의하여 $a=-4$이므로

$f(x)g(x)=2x^2(x-2)$

이때 $f(2)$가 최대가 되는 $f(x)$는

$f(x)=2x^2$

이므로 구하는 최댓값은

$f(2)=8$

정답 ③

15. **출제의도** : 등차수열의 합의 공식을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

$$S_n = \frac{n\{2\times 50+(n-1)\times(-4)\}}{2}$$
$$=-2n^2+52n$$
$$=-2(n-13)^2+2\times 13^2$$

이므로 S_n의 값은 $n=13$일 때 최대이다.

따라서 $\sum_{k=m}^{m+4} S_k$의 값은 $m=11$일 때 최대가 된다.

정답 ④

16. **출제의도** : 확률변수의 평균과 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 모집단의 확률분포에서

$$\sigma^2 = \mathrm{V}(X)$$
$$=\mathrm{E}(X^2)-\{\mathrm{E}(X)\}^2$$
$$=1^2\times\frac{1}{6}+2^2\times\frac{1}{3}+3^2\times\frac{1}{2}-\left(\frac{7}{3}\right)^2$$
$$=6-\frac{49}{9}=\frac{5}{9}$$

이므로 $p=\frac{5}{9}$

$\overline{X}$는 이 모집단에서 크기가 10인 표본을 임의추출하여 구한 표본평균이므로

$$\mathrm{V}(\overline{X})=\frac{\mathrm{V}(X)}{10}=\frac{1}{10}\times\frac{5}{9}=\frac{1}{18}$$

즉, $q=\frac{1}{18}$

또,

$$\mathrm{V}(Y)=\mathrm{V}(10\overline{X})=10^2\times\mathrm{V}(\overline{X})$$
$$=100\times\frac{1}{18}=\frac{50}{9}$$

이므로 $r=\frac{50}{9}$

따라서

$$p+q+r=\frac{5}{9}+\frac{1}{18}+\frac{50}{9}=\frac{37}{6}$$

정답 ④

17. **출제의도** : 로그의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

36의 양의 약수는

1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 36

이고,

$f(1)$, $f(4)$, $f(9)$, $f(36)$은 홀수,

$f(2)$, $f(3)$, $f(6)$, $f(12)$, $f(18)$은 짝수

이다.

따라서

$$\sum_{k=1}^{9}\left\{(-1)^{f(a_k)}\times\log a_k\right\}$$
$$=-\log 1+\log 2+\log 3-\log 4+\log 6-\log 9$$

$$+\log 12+\log 18-\log 36$$
$$=\log\frac{2\times 3\times 6\times 12\times 18}{1\times 4\times 9\times 36}$$
$$=\log 6$$
$$=\log 2+\log 3$$

정답 ①

18. **출제의도** : 등비급수를 이용하여 무한히 반복되는 도형의 넓이의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

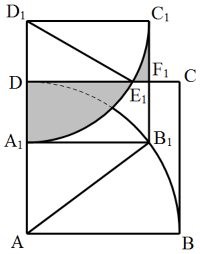


그림 R_1에서 $\overline{AA_1}=3$, $\overline{AB_1}=5$이므로

$\overline{A_1B_1}=4$

즉, $\overline{D_1E_1}=4$, $\overline{D_1D}=2$이므로

$\angle DD_1E_1=60^\circ$, $\angle C_1D_1E_1=30^\circ$

따라서

$$S_1=\left(\frac{8}{3}\pi-2\sqrt{3}\right)+\left(8-2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$=8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi$$

한편, 정사각형 $A_{n+1}B_{n+1}C_{n+1}D_{n+1}$의 한 변의 길이는 $A_nB_nC_nD_n$의 한 변의 길이의 $\frac{4}{5}$이므로 그림 R_{n+1}에서 새로 색칠한 부분의 넓이는 그림 R_n에서 새로 색칠한 부분의 넓이의 $\frac{16}{25}$이다.

따라서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{16}{25}}$$

$$=\frac{25}{9}\left(8-4\sqrt{3}+\frac{4}{3}\pi\right)$$

$$=\frac{100}{9}\left(2-\sqrt{3}+\frac{\pi}{3}\right)$$

정답 ⑤

19. **출제의도** : 같은 것이 있는 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)를 만족시키는 경우는 다음 두 가지 경우뿐이다.

(i) 홀수 1개, 짝수 4개를 택하는 경우

사용할 홀수 1개를 택하는 경우의 수는

$_3C_1=3$

이 각각에 대하여 짝수는 3개 중에서 2개를 택하여 두 번씩 사용해야 하므로 사용할 짝수를 택하는 경우의 수는

$_3C_2=3$

이 각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!2!}=30$

따라서 이 경우의 수는

$3\times3\times30=270$

(ii) 홀수 3개, 짝수 2개를 택하는 경우

짝수는 1개만 택하여 두 번 사용해야 하므로 사용할 짝수 1개를 택하는 경우의 수는

$_3C_1=3$

이 각각에 대하여 택한 수 5개를 일렬로 나열하는 경우의 수는

$\frac{5!}{2!}=60$

따라서 이 경우의 수는

$3\times60=180$

(i), (ii)에 의하여 구하는 경우의 수는

$270+180=450$

정답 ①

20. 출제의도 : 두 함수의 곱의 연속성과 미분가능성을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

다항함수 $p(x)$는 실수 전체의 집합에서 연속이므로

$$\lim_{x\to0+}p(x)=\lim_{x\to0-}p(x)=p(0)$$

이 성립한다.

ㄱ. $f(0)=0$이고

$$\lim_{x\to0-}f(x)=\lim_{x\to0-}(-x)=0,$$

$$\lim_{x\to0+}f(x)=\lim_{x\to0+}(x-1)=-1$$

이므로

$$\lim_{x\to0-}p(x)f(x)=\lim_{x\to0-}p(x)\times\lim_{x\to0-}f(x)$$

$=0$,

$$\lim_{x\to0+}p(x)f(x)=\lim_{x\to0+}p(x)\times\lim_{x\to0+}f(x)$$

$=-p(0)$,

$p(0)f(0)=0$

이때 함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이면 $x=0$에서도 연속이므로

$$\lim_{x\to0-}p(x)f(x)=\lim_{x\to0+}p(x)f(x)=p(0)f(0)$$

이 성립해야 한다.

즉, $-p(0)=0$이어야 하므로

$p(0)=0$ (참)

ㄴ. $g(x)=p(x)f(x)$라 하자.

함수 $p(x)f(x)$가 실수 전체의 집합에서 미분가능하면 $x=2$에서도 미분가능하므로

$\displaystyle\lim_{x\to2}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$의 값이 존재해야 한다.

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-1)p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}\frac{(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2-}p(x)+\lim_{x\to2-}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$

$=p(2)+p'(2)$

이고,

$$\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{p(x)f(x)-p(2)f(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{(2x-3)p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}\frac{2(x-2)p(x)+p(x)-p(2)}{x-2}$$

$$=\lim_{x\to2+}2p(x)+\lim_{x\to2+}\frac{p(x)-p(2)}{x-2}$$

$=2p(2)+p'(2)$

이므로

$$\lim_{x\to2-}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}=\lim_{x\to2+}\frac{g(x)-g(2)}{x-2}$$

가 성립하려면

$p(2)+p'(2)=2p(2)+p'(2)$

즉, $p(2)=0$이어야 한다. (참)

ㄷ. (반례) $h(x)=p(x)\{f(x)\}^2$이라 하자.

$p(x)=x^2(x-2)$이면

$$h(x)=\begin{cases}x^4(x-2) & (x\le0)\\ x^2(x-1)^2(x-2) & (0<x\le2)\\ x^2(2x-3)(x-2) & (x>2)\end{cases}$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x\ne0,\ x\ne2$인 실수

전체의 집합에서 미분가능하다.

한편,

$$\lim_{x\to 0-}\frac{h(x)-h(0)}{x}=\lim_{x\to 0+}\frac{h(x)-h(0)}{x}=0$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=0$에서 미분가능하다.

또,

$$\lim_{x\to 2-}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=\lim_{x\to 2+}\frac{h(x)-h(2)}{x-2}=4$$

이므로 함수 $h(x)$는 $x=2$에서 미분가능하다.

따라서 함수 $h(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

하지만 함수 $p(x)$는 $x^2(x-2)^2$으로 나누어떨어지지 않는다. (거짓)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

정답 ②

21. **출제의도** : 수열의 규칙성을 추론하여 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_{20}=a_{10}-1$에서 $a_{20}=1$이므로

$a_{10}=2$

또, $a_{10}=a_5-1$에서

$a_5=3$

$a_5=2a_2+1$에서

$a_2=1$

$a_2=a_1-1$에서

$a_1=2$

한편,

$a_{2n}+a_{2n+1}=(a_n-1)+(2a_n+1)=3a_n$

이므로

$a_2+a_3=3a_1$

$a_4+a_5+a_6+a_7=3a_2+3a_3=3^2a_1$

$a_8+a_9+\cdots+a_{15}$

$\quad=3a_4+3a_5+\cdots+3a_7=3^3a_1$

$a_{16}+a_{17}+\cdots+a_{31}$

$\quad=3a_8+3a_9+\cdots+3a_{15}=3^4a_1$

$a_{32}+a_{33}+\cdots+a_{63}$

$\quad=3a_{16}+3a_{17}+\cdots+3a_{31}=3^5a_1$

따라서

$$\sum_{n=1}^{63}a_n$$

$$=a_1+(a_2+a_3)+(a_4+\cdots+a_7)+(a_8+\cdots+a_{15})+(a_{16}+\cdots+a_{31})+(a_{32}+\cdots+a_{63})$$

$$=a_1(1+3+3^2+3^3+3^4+3^5)$$

$$=2\times\frac{3^6-1}{3-1}=728$$

정답 ④

22. **출제의도** : 순열과 조합의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

${}_7\mathrm{P}_2+{}_7\mathrm{C}_2$

$$=7\times 6+\frac{7\times 6}{2}=42+21=63$$

정답 63

23. **출제의도** : 등비수열의 뜻을 이해하고 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$$\frac{a_{16}}{a_{14}}+\frac{a_8}{a_7}=r^2+r$$

이므로

$r^2+r=12$

$(r+4)(r-3)=0$

$r>0$이므로 $r=3$

따라서

$$\frac{a_3}{a_1}+\frac{a_6}{a_3}=r^2+r^3$$

$$=3^2+3^3=9+27=36$$

정답 36

24. 출제의도 : 이항분포를 이해하여 분산을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\mathrm{E}(X)=80p=20$이므로

$$p=\frac{1}{4}$$

따라서

$$\mathrm{V}(X)=80\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}=15$$

정답 15

25. 출제의도 : 나머지정리를 이용하여 수열의 일반항을 구하고, 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_n=2n^2-3n+1$이므로

$$\sum_{n=1}^{7}(a_n-n^2+n)=\sum_{n=1}^{7}(n^2-2n+1)$$

$$=\sum_{n=1}^{7}(n-1)^2$$

$$=\sum_{k=1}^{6}k^2$$

$$=\frac{6\times7\times13}{6}=91$$

정답 91

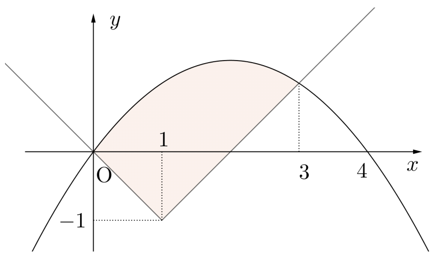
26. 출제의도 : 정적분을 이용하여 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 함수

$$f(x)=\frac{1}{3}x(4-x),\ g(x)=|x-1|-1$$

의 그래프는 다음과 같다.



$x<1$일 때, $g(x)=-x$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=-x$에서

$x=0$

$x\geq1$일 때, $g(x)=x-2$이므로

$\frac{1}{3}x(4-x)=x-2$에서

$4x-x^2=3x-6,$

$x^2-x-6=(x-3)(x+2)=0$

$x=3$

따라서 구하는 넓이는

$$S=\int_0^1\{f(x)-g(x)\}dx$$

$$+\int_1^3 \{f(x)-g(x)\}dx$$

$$=\int_0^1 \left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{7}{3}x\right)dx$$

$$+\int_1^3 \left(-\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{3}x+2\right)dx$$

$$=\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{7}{6}x^2\right]_0^1+\left[-\frac{1}{9}x^3+\frac{1}{6}x^2+2x\right]_1^3$$

$$=\left(-\frac{1}{9}+\frac{7}{6}\right)+\left\{\left(-3+\frac{3}{2}+6\right)-\left(-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}+2\right)\right\}$$

$$=\frac{7}{2}$$

이므로

$4S=14$

정답 14

27. **출제의도** : 수직선 위를 움직이는 점의 속도를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 P, Q의 시각 t에서의 속도를 각각 v_1, v_2라 하면

$v_1=3t^2-4t+3$, $v_2=2t+12$

이므로

$3t^2-4t+3=2t+12$

에서

$3t^2-6t-9=0$

$(t+1)(t-3)=0$

$t\geq 0$이므로 $t=3$이고 이때 두 점 P, Q의 위치는 각각 18, 45이다.

따라서 구하는 두 점 사이의 거리는

$45-18=27$

정답 27

28. **출제의도** : 정적분과 미분의 관계와 정적분의 성질을 이용하여 함수식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에 주어진 등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$$f(x)=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(1)+\frac{x-1}{2}f'(x)$$

즉,

$f(x)=f(1)+(x-1)f'(x)$ ⋯ ㉠

㉠의 좌변인 $f(x)$의 최고차항을

ax^n (a는 0이 아닌 상수, n은 자연수)

라 하면 ㉠의 우변의 최고차항은

$x\times anx^{n-1}=anx^n$

이므로 $ax^n=anx^n$에서

$n=1$

이때 $f(0)=1$이므로 일차함수 $f(x)$는

$$f(x)=ax+1$$

로 놓을 수 있다.

이때

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 (ax+1)dx$$

$$=\left[\frac{a}{2}x^2+x\right]_0^2=2a+2$$

이고,

$$\int_{-1}^1 xf(x)dx=\int_{-1}^1 (ax^2+x)dx$$

$$=2\int_0^1 ax^2dx=2\left[\frac{a}{3}x^3\right]_0^1=\frac{2a}{3}$$

이므로 조건 (나)에서

$$2a+2=5\times\frac{2a}{3}$$

$a=\frac{3}{2}$

따라서 $f(x)=\frac{3}{2}x+1$이므로

$f(4)=\frac{3}{2}\times 4+1=7$

정답 7

29. **출제의도** : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가), (나)에 의하여 학생 A에게 사탕 1개, 학생 B에게 초콜릿 1개를 먼저 나누어주고 나머지 사탕 5개와 초콜릿 4개를 세 명의 학생에게 나누어주는 경우의 수를 구하면 된다.

그런데 조건 (다)에 의하여 학생 C가 사탕이나 초콜릿을 적어도 1개 받아야 하므로 학생 C가 아무것도 받지 못하는 경우의 수를 빼면 된다.

따라서 구하는 경우의 수는

${}_3H_5\times{}_3H_4-{}_2H_5\times{}_2H_4$

$={}_7C_5\times{}_6C_4-{}_6C_5\times{}_5C_4$

$={}_7C_2\times{}_6C_2-{}_6C_1\times{}_5C_1$

$=21\times 15-6\times 5$

$=285$

정답 285

30. **출제의도** : 주어진 조건을 이용하여 삼차함수의 그래프를 추론하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ (a, b, c, d는 상수)로 놓을 수 있다.

$f(0)=0$이므로

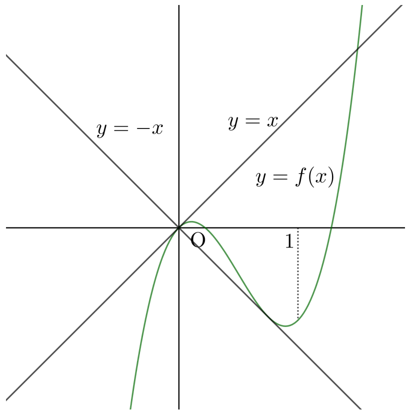
$d=0$

$f'(x)=3ax^2+2bx+c$에서 $f'(1)=1$이므로

$3a+2b+c=1$ … ㉠

조건 (가)와 조건 (나)에서 곡선 $y=f(x)$는 두 직선 $y=x$, $y=-x$와 각각 두 점에서 만나야 한다.

이때 $f(0)=0$, $f'(1)=1$이므로 곡선 $y=f(x)$는 그림과 같이 직선 $y=x$와 원점에서 접하고, 직선 $y=-x$와 점 $(\alpha, f(\alpha))$ $(\alpha>0)$에서 접해야 한다.



즉, $f'(0)=1$이므로

$c=1$

이때 ㉠에서 $3a+2b=0$이므로

$b=-\frac{3}{2}a$

따라서 $f(x)=ax^3-\frac{3}{2}ax^2+x$이다.

곡선 $y=f(x)$와 직선 $y=-x$의 접점의 x좌표가 α이므로 $f(\alpha)=-\alpha$에서

$a\alpha^3-\frac{3}{2}a\alpha^2+\alpha=-\alpha$

이때 $\alpha>0$이므로

$2a\alpha^2-3a\alpha+4=0$ ⋯ ㉡

$f'(\alpha)=-1$이므로

$3a\alpha^2-3a\alpha+1=-1$

$3a\alpha^2-3a\alpha+2=0$ ⋯ ㉢

㉡, ㉢에서

$\alpha=\frac{3}{4}$, $a=\frac{32}{9}$

따라서

$f(x)=\frac{32}{9}x^3-\frac{16}{3}x^2+x$

이므로

$f(3)=32\times3-16\times3+3=51$

정답 51