2019학년도 대학수학능력시험

수학영역 나형 정답 및 풀이

01. ②	02. ⑤	03. ③	04. ③	05. ①
06. ②	07. ④	08. ②	09. ⑤	10. ④
11. ③	12. ②	13. ①	14. ⑤	15. ①
16. ④	17. ④	18. ③	19. ①	20. ⑤
21. ①	22. 15	23. 20	24. 63	25. 10
26. 2	27. 22	28. 12	29. 117	
30. 5				

1. 출제의도 : 지수법칙을 이용하여 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2^{-1}\times 16^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times 4=2$$

정답 ②

2. 출제의도 : 집합의 연산에서 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A-B=\{5,9\}$이므로

$a=5$

정답 ⑤

3. 출제의도 : 수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\frac{6n^2-3}{2n^2+5n}=\lim_{n\to\infty}\frac{6-\frac{3}{n^2}}{2+\frac{5}{n}}$$

$$=\frac{6-0}{2+0}=3$$

정답 ③

4. 출제의도 : 함숫값과 합성함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(4)=1$

또 $f(2)=3$이므로

$(f\circ f)(2)=f(f(2))$

$=f(3)=4$

따라서 $f(4)+(f\circ f)(2)=1+4=5$

정답 ③

5. 출제의도 : 등차수열의 공차를 이용하여 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_{10}-a_7=3d$이므로

$3d=6$, $d=2$

따라서

$a_4=a_1+3d$

$=4+6=10$

정답 ①

6. 출제의도 : 이항정리를 이용하여 특정한 항의 계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$(1+x)^7$의 일반항은

${}_7\mathrm{C}_r x^r$ $(r=0, 1, 2, \cdots, 7)$

$r=4$일 때, ${}_7\mathrm{C}_4x^4$이므로

x^4의 계수는

${}_7\mathrm{C}_4={}_7\mathrm{C}_3=35$

정답 ②

7. **출제의도** : 함수의 그래프를 이용하여 좌극한의 값과 우극한의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to-1-}f(x)=2$

$\lim_{x\to1+}f(x)=1$

따라서

$\lim_{x\to-1-}f(x)-\lim_{x\to1+}f(x)=2-1=1$

정답 ④

8. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

A와 B^C이 서로 배반사건이므로

$A\subset B$

즉 $B=A\cup(A^C\cap B)$

따라서

$\mathrm{P}(B)=\mathrm{P}(A)+\mathrm{P}(A^C\cap B)$

$=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}$

정답 ②

9. **출제의도** : 함수의 극값을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)=x^3-3x+a$에서

$f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f'(x)=0$에서

$x=-1$ 또는 $x=1$

함수 $f(x)$의 증가와 감소를 표로 나타내면 다음과 같다.

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

함수 $f(x)$는 $x=-1$에서 극대, $x=1$에서 극소이다.

이때, 함수 $f(x)$의 극댓값이 7이므로

$f(-1)=-1+3+a=2+a=7$

따라서

$a=5$

정답 ⑤

10. **출제의도** : 확률밀도함수의 성질을 이용하여 미지수의 값을 구하고, 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$0\le x\le2$에서 확률밀도함수의 그래프와 x축으로 둘러싸인 부분의 넓이는 1이다.

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{4}+\left(a-\frac{1}{3}\right)\times\frac{3}{4}+\frac{1}{2}\times(2-a)\times\frac{3}{4}=1$$

$\frac{3}{8}a=\frac{3}{8}$에서

$a=1$

따라서

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le a\right) = \mathrm{P}\left(\frac{1}{3} \le X \le 1\right)$$
$$= \left(1 - \frac{1}{3}\right) \times \frac{3}{4} = \frac{1}{2}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 충분조건이 되도록 하는 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 조건 p, q의 진리집합을 각각 P, Q라 하자.

조건 $\sim p$의 진리집합은 P^C이다.

이때,

$$P^C = \{x \mid x^2 - 4x + 3 \le 0\}$$
$$= \{x \mid 1 \le x \le 3\}$$
$$Q = \{x \mid x \le a\}$$

따라서 $\sim p$가 q이기 위한 충분조건이므로

$$P^C \subset Q$$

이어야 한다.

즉 $a \ge 3$이다.

따라서 실수 a의 최솟값은 3이다.

정답 ③

12. 출제의도 : 모평균에 대한 신뢰구간을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

49개를 이용하여 얻은 표본평균의 값을 $\overline{x}$라 하면

$$\overline{x} - 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}} \le m \le \overline{x} + 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}}$$

이다. 이때,

$$7.992 - a$$
$$= \left(\overline{x} + 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}}\right) - \left(\overline{x} - 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}}\right)$$
$$= 2 \times 1.96 \times \frac{1.4}{\sqrt{49}}$$
$$= 0.784$$

이므로

$$a = 7.992 - 0.784 = 7.208$$

정답 ②

13. 출제의도 : 귀납적으로 정의된 수열에서 특정한 항의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a_1 = 2$이므로

$$a_2 = \frac{a_1}{2 - 3a_1} = \frac{2}{2-6} = -\frac{1}{2}$$
$$a_3 = 1 + a_2 = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$
$$a_4 = \frac{a_3}{2 - 3a_3} = \frac{\frac{1}{2}}{2 - \frac{3}{2}} = 1$$
$$a_5 = 1 + a_4 = 1 + 1 = 2$$
$$\vdots$$

이때,

$a_n = a_{n+4}$(n은 자연수)

이므로

$$a_1 + a_2 + a_3 + a_4$$
$$= a_5 + a_6 + a_7 + a_8$$
$$\vdots$$
$$= a_{37} + a_{38} + a_{39} + a_{40}$$
$$= 3$$

따라서

$$\sum_{n=1}^{40} a_n = 10\times 3 = 30$$

정답 ①

14. **출제의도** : 주어진 조건을 만족시키는 미지수의 값을 구하고, 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
주어진 식의 양변에 $x=1$을 대입하면
$0=1+a-2$에서
$a=1$

한편, $\frac{d}{dt}f(t)=f'(t)$이므로

$$\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt = \int_1^x f'(t)\,dt$$
$$= [f(t)]_1^x = f(x)-f(1)$$

이때 $\int_1^x \left\{\frac{d}{dt}f(t)\right\}dt = x^3+x^2-2$에서
$f(x)-f(1)=x^3+x^2-2$
따라서 $f'(x)=3x^2+2x$이므로
$f'(a)=f'(1)=3+2=5$

정답 ⑤

15. **출제의도** : 주어진 로그에 관한 식을 만족시키는 모든 자연수의 값의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
$5\log_n 2$의 값이 자연수가 되려면

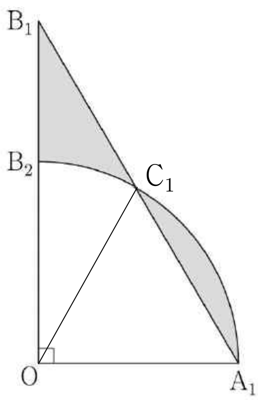
$\log_n 2=1$ 또는 $\log_n 2=\frac{1}{5}$

이어야 한다.
$\log_n 2=1$에서 $n=2$
$\log_n 2=\frac{1}{5}$에서 $n=2^5=32$
따라서 구하는 모든 n의 값의 합은
$2+32=34$

정답 ①

16. 등비급수의 합을 이용하여 도형의 넓이에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
그림 R_1에서 부채꼴 $\mathrm{OA_1B_2}$의 호 $\mathrm{A_1B_2}$와 선분 $\mathrm{A_1B_1}$이 만나는 점을 $\mathrm{C_1}$이라 하자.



$\angle \mathrm{C_1OA_1}=60^\circ$ 이므로
부채꼴 $\mathrm{C_1OA_1}$의 넓이와 삼각형 $\mathrm{C_1OA_1}$의 넓이의 차는

$$16\pi\times\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{3}}{4}\times 16$$
$$=\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3} \quad \cdots\cdots ㉠$$

또, $\angle \mathrm{C_1OB_1}=30^\circ$ 이므로
삼각형 $\mathrm{C_1OB_1}$의 넓이와 부채꼴 $\mathrm{C_1OB_2}$의 넓이의 차는

$$\frac{1}{2}\times 4\sqrt{3}\times 2-16\pi\times\frac{1}{12}$$
$$=4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi \quad \cdots\cdots ㉡$$

㉠, ㉡에서

$$S_1=\left(\frac{8}{3}\pi-4\sqrt{3}\right)+\left(4\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi\right)$$
$$=\frac{4}{3}\pi$$

한편, 삼각형 OA_1B_1과 삼각형 OA_2B_2의 닮음비는

$\overline{OB_1}:\overline{OB_2}=4\sqrt{3}:4=\sqrt{3}:1$

따라서 $\lim_{n\to\infty}S_n$은 첫째항이 $\frac{4}{3}\pi$이고, 공비가 $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2=\frac{1}{3}$인 등비급수이므로

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{4}{3}\pi}{1-\frac{1}{3}}=2\pi$$

정답 ④

17. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수를 구할 수 있으며 이를 이용하여 곡선과 x축 및 두 직선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

함수 $y=f(x)$의 그래프와 함수 $y=f(x)$의 그래프를 x축의 방향으로 3만큼, y축의 방향으로 4만큼 평행이동한 그래프가 일치해야 한다.

또, 조건 (나)에서 $\int_0^6 f(x)dx=0$이므로

$$\int_0^6 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 f(x)dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_3^6 \{f(x-3)+4\}dx$$
$$=\int_0^3 f(x)dx+\int_0^3 \{f(x)+4\}dx$$
$$=2\int_0^3 f(x)dx+12$$

에서

$$2\int_0^3 f(x)dx+12=0$$
$$\int_0^3 f(x)dx=-6$$

따라서

$$\int_3^6 f(x)dx=6$$

이므로

$$\int_6^9 f(x)dx=12+\int_3^6 f(x)dx$$
$$=12+6$$
$$=18$$

정답 ④

18. 출제의도 : 조건부확률을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

y좌표가 처음으로 3이 되는 경우는

① 점 A가 $(0,2)$에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우

② 점 A가 $(1,2)$에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우

③ 점 A가 $(2,2)$에 있을 때 동전의 뒷면이 나오는 경우

이다.

이때, 점 A의 x좌표가 1인 경우는 ②의

경우이다.

①의 경우의 확률은

$${}_2C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}$$

②의 경우의 확률은

$${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\frac{1}{2}=\frac{3}{16}$$

③의 경우의 확률은

$${}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}=\frac{6}{32}=\frac{3}{16}$$

따라서 구하는 확률은

$$\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{8}+\frac{3}{16}+\frac{3}{16}}=\frac{\frac{3}{16}}{\frac{1}{2}}=\frac{3}{8}$$

정답 ③

19. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 f의 개수를 구하는 과정에서 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 f와 함수 $f\circ f$의 치역을 각각 A와 B라 하자.

$n(A)=6$이면 함수 f는 일대일 대응이고, 함수 $f\circ f$도 일대일 대응이므로 $n(B)=6$이다.

또한 $n(A)\le 4$이면 $B\subset A$이므로 $n(B)\le 4$이다.

그러므로 $n(A)=5$, 즉 $B=A$인 경우만 생각하면 된다.

(ⅰ) $n(A)=5$인 X의 부분집합 A를 선택하는 경우의 수는 $\boxed{{}_6C_5=6}$이다.

(ⅱ) (ⅰ)에서 선택한 집합 A에 대하여, X의 원소 중 A에 속하지 않는 원소를 k라 하자.

$n(A)=5$이므로 집합 A에서 $f(k)$를 선택하는 경우의 수는

k를 제외한 5개의 원소 중에서 하나를 택하면 되므로

$\boxed{{}_5C_1=5}$이다.

(ⅲ) (ⅰ)에서 선택한 $A=\{a_1, a_2, a_3, a_4, a_5\}$와 (ⅱ)에서 선택한 $f(k)$에 대하여 $f(k)\in A$이며 $A=B$이므로

$$A=\{f(a_1), f(a_2), f(a_3), f(a_4), f(a_5)\}\quad\cdots (*)$$

이다. $(*)$을 만족시키는 경우의 수는 집합 A에서 집합 A로의 일대일 대응의 개수와 같으므로

$\boxed{5!=120}$이다.

따라서 (ⅰ), (ⅱ), (ⅲ)에 의하여 구하는 함수 f의 개수는

$\boxed{6}\times\boxed{5}\times\boxed{120}$이다.

즉 $p=6$, $q=5$, $r=120$이므로

$p+q+r=6+5+120=131$

정답 ①

20. 출제의도 : 유리함수의 그래프를 이용하여 옳은 것을 찾을 수 있는가?

정답풀이 :

$y=\frac{k}{x-1}+3$에서

$y=0$이면 $x=1-\frac{k}{3}=\frac{3-k}{3}$이므로

$\mathrm{A}\left(\frac{3-k}{3}, 0\right)$

$x=0$이면 $y=3-k$이므로

$\mathrm{B}(0, 3-k)$

또, 두 점근선의 교점을 R라 하면

$\mathrm{R}(1, 3)$

이때, 선분 BP의 중점이 R이므로

$\mathrm{P}(a, b)$라 하면

$\frac{0+a}{2}=1$에서 $a=2$

$\frac{3-k+b}{2}=3$에서 $b=3+k$

즉 $\mathrm{P}(2, 3+k)$

ㄱ. $k=1$이면 $\mathrm{P}(2, 4)$ (참)

ㄴ. 직선 AB의 기울기는

$$\frac{k-3}{\frac{3-k}{3}}=-3$$

직선 AP의 기울기는

$$\frac{k+3}{\frac{3+k}{3}}=3$$

따라서 두 기울기의 합은

$-3+3=0$ (참)

ㄷ. 사각형 PBAQ의 넓이는 사각형 PBOQ의 넓이에서 삼각형 OAB의 넓이를 빼면 된다.

사각형 PBAQ의 넓이는

$$\frac{1}{2}\times\{(3-k)+(3+k)\}\times 2 -\frac{1}{2}\times\frac{3-k}{3}\times(3-k)$$

$$=6-\frac{(3-k)^2}{6}$$

삼각형 OAB의 넓이는 $\frac{3}{2}$보다 작고, 사각형 PBAQ의 넓이가 자연수이므로 삼각형 OAB의 넓이는 1이어야 한다.

$\frac{(3-k)^2}{6}=1$에서

$k=3-\sqrt{6}$

$2<\sqrt{6}<3$이므로 $0<k<1$이다.

한편, 직선 BP의 기울기는

$$\frac{(3+k)-(3-k)}{2-0}=k$$

따라서 직선 BP의 기울기는 0과 1 사이의 값이다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 :

함수의 연속성을 이해하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서 모든 실수 x에 대하여

$f(x)g(x)=x(x+3)$

이고 조건 (나)에서 $g(0)=1$이므로 위의 식에 $x=0$을 대입하면

$f(0)g(0)=0$

$f(0)=0$

이때, $f(x)$는 최고차항의 계수가 1인 삼차함수이므로

$f(x)=x(x^2+ax+b)$ (a, b는 상수)

이때,

$$g(x)=\frac{x(x+3)}{f(x)}=\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}$$

한편, 함수 $g(x)$가 실수 전체의 집합에서 연속이므로 $\lim_{x\to 0}g(x)=g(0)$에서

$$\lim_{x\to 0}g(x)=\lim_{x\to 0}\frac{x(x+3)}{x(x^2+ax+b)}=\lim_{x\to 0}\frac{x+3}{x^2+ax+b}=\frac{3}{b}$$

또, $g(0)=1$이므로

$b=3$

이때,

$g(x)=\dfrac{x+3}{x^2+ax+3}$

함수 $g(x)$가 실수전체 집합에서 연속이어야 하므로 방정식 $x^2+ax+3=0$은 허근을 가져야 한다.

그러므로

$D=a^2-12<0$

$(a+2\sqrt{3})(a-2\sqrt{3})<0$

$-2\sqrt{3}<a<2\sqrt{3}$ $\cdots\cdots$ ㉠

한편, $f(1)$이 자연수이므로

$f(1)=1\times(1^2+a+3)$

$\quad=a+4$

에서 $a+4$가 자연수이어야 하므로

$a>-4$이고 a는 정수이다.

㉠에서 a의 값은

$-3,\ -2,\ -1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$

이다. 한편,

$g(2)=\dfrac{5}{2a+7}$

이고 $a=3$일 때 이 값은 최솟값 $\dfrac{5}{13}$를 갖는다.

정답 ①

22. 출제의도 : 순열의 수와 조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_6\mathrm{P}_2-{}_6\mathrm{C}_2=6\times5-\frac{6\times5}{2\times1}$$
$$=30-15$$
$$=15$$

정답 15

23. 출제의도 : 다항함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=4x^3-6x$**이므로**

$f'(2)=4\times2^3-6\times2=20$

정답 20

24. 출제의도 : 등비수열의 합을 이용하여 등비수열의 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하자.

$S_9-S_5=a_6+a_7+a_8+a_9$

$\quad=7r^5+7r^6+7r^7+7r^8$

$\quad=7r^5(1+r+r^2+r^3)$

$S_6-S_2=a_3+a_4+a_5+a_6$

$\quad=7r^2+7r^3+7r^4+7r^5$

$\quad=7r^2(1+r+r^2+r^3)$

이때,

$$\frac{S_9-S_5}{S_6-S_2}=\frac{7r^5(1+r+r^2+r^3)}{7r^2(1+r+r^2+r^3)}=r^3$$

이므로

$r^3=3$

따라서

$a_7=7r^6=7\times(r^3)^2=7\times3^2=63$

정답 63

25. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_{1}^{4}(x+|x-3|)dx$$

$$=\int_{1}^{3}(x+|x-3|)dx+\int_{3}^{4}(x+|x-3|)dx$$

$$=\int_{1}^{3}\{x-(x-3)\}dx+\int_{3}^{4}\{x+(x-3)\}dx$$

$$=\int_{1}^{3}3\,dx+\int_{3}^{4}(2x-3)dx$$

$$=[3x]_1^3+[x^2-3x]_3^4$$

$$=(9-3)+\{(16-12)-(9-9)\}$$

$$=6+4$$

$$=10$$

정답 10

26. 출제의도 : 무리함수의 그래프를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 실수 k의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{x}$의 그래프를 x축의 방향으로 -3만큼평행이동한 것이다.

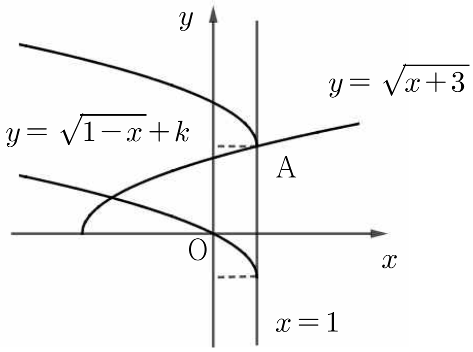
한편, 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프는 함수 $y=\sqrt{-x}$의 그래프를 x축의 방향으로 1만큼, y축의 방향으로 k만큼 평행이동한 것이다.

한편, 함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프와 직선 $x=1$의 교점을 A라 하면 점 A의 좌표는 $(1,\ 2)$이므로 함수 $y=\sqrt{x+3}$의 그래프와 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 만나도록 하는 실수 k의 최댓값은 함수 $y=\sqrt{1-x}+k$의 그래프가 점 $\mathrm{A}(1,\ 2)$를 지날 때이다.

즉, $2=\sqrt{1-1}+k$에서

$k=2$

따라서 실수 k의 최댓값은 2이다.



정답 2

27. 출제의도 : 수직선 위를 움직이는 점의 P의 위치와 가속도를 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 위치 x가

$$x=-\frac{1}{3}t^3+3t^2+k$$

이므로 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 속도 v는

$$v=-t^2+6t$$

이고, 점 P의 시각 $t(t\geq 0)$에서의 가속도 a는

$$a=-2t+6$$

점 P의 가속도가 0이므로

$-2t+6=0$에서

$t=3$

$t=3$일 때, 점 P의 위치가 40이므로

$$-\frac{1}{3}\times 3^3+3\times 3^2+k=40$$

따라서 $k=22$

정답 22

28. **출제의도** : 여사건의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7개의 공을 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 숫자가 적혀 있는 공이 서로 이웃하지 않게 나열되는 사건을 A라 하면

A의 여사건은 7개의 공을 임의로 일렬로 나열할 때, 같은 숫자가 적혀 있는 공이 서로 이웃하게 나열되는 사건이다.

7개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 7!이다.

4가 적혀 있는 흰 공과 4가 적혀 있는 검은 공을 하나의 공으로 생각하여 6개의 공을 일렬로 나열하는 경우의 수는 6!이고, 이 각각에 대하여 4가 적혀 있는 흰 공과 4가 적혀 있는 검은 공이 서로 위치를 바꿀 수 있으므로 이때의 경우의 수는 6!×2!이다. 이때,

$$\mathrm{P}(A^C)=\frac{6!\times 2!}{7!}=\frac{2}{7}$$

이므로

$$\mathrm{P}(A)=1-\mathrm{P}(A^C)=1-\frac{2}{7}=\frac{5}{7}$$

따라서 $p=7$, $q=5$이므로

$p+q=7+5=12$

정답 12

29. **출제의도** : 등차수열과 등비수열의 합을 이용하여 특정한 항의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)와 조건 (나)에서

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+|b_n|)-\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=67-27$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{5}(|b_n|-b_n)=40 \quad \cdots\cdots ㉠$$

한편, 등비수열 $\{b_n\}$의 공비를 r(r는 음의 정수)라 하면

$b_1>0$, $b_2<0$, $b_3>0$, $b_4<0$, $b_5>0$

이므로 ㉠에서

$-2(b_2+b_4)=40$

즉, $b_1r+b_1r^3=-20 \quad \cdots\cdots ㉡$

$b_1r(1+r^2)=-20$

이다. 이때 b_1r는 음의 정수이고, $1+r^2$은 자연수이므로 $1+r^2$은 20의 양의 약수이어야 하다.

20의 양의 약수는 1, 2, 4, 5, 10, 20이고, r가 음의 정수이므로

$r=-1$ 또는 $r=-2$ 또는 $r=-3$

이다. ㉡에서

$r=-1$일 때, $b_1=10$

$r=-2$일 때, $b_1=2$

$r=-3$일 때, $b_1=\frac{2}{3}$

이때, b_1은 자연수이므로

$b_1=10$, $r=-1$ 또는 $b_1=2$, $r=-2$

(ⅰ) $b_1=10$, $r=-1$일 때

$\sum_{1}^{5}b_n=10$이므로

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{5}(a_n+b_n)=27$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{5} a_n + \sum_{n=1}^{5} b_n = 27$$

$$\sum_{n=1}^{5} a_n + 10 = 27$$

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = 17$$

이때, $\sum_{n=1}^{5} a_n = 5a_3 = 17$에서

$$a_3 = \frac{17}{5}$$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 첫째항이 자연수이고 공차가 음의 정수이므로 등차수열 $\{a_n\}$의 모든 항은 정수이다.

따라서 $b_1 = 10$, $r = -1$은 주어진 조건을 만족시키지 못한다.

(ⅱ) $b_1 = 2$, $r = -2$일 때

$$\sum_{1}^{5} b_n = \frac{2\{1-(-2)^5\}}{1-(-2)} = 22$$

조건 (가)에서

$$\sum_{n=1}^{5} (a_n + b_n) = 27$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{5} a_n + 22 = 27$$

$$\sum_{n=1}^{5} a_n = 5$$

이때, $\sum_{n=1}^{5} a_n = 5a_3 = 5$에서

$$a_3 = 1$$

또, $\sum_{1}^{5} |b_n| = \frac{2\{1-|-2|^5\}}{1-|-2|} = 62$

조건 (다)에서

$$\sum_{n=1}^{5} (|a_n| + |b_n|) = 81$$

이므로

$$\sum_{n=1}^{5} |a_n| + \sum_{n=1}^{5} |b_n| = 81$$

$$\sum_{n=1}^{5} |a_n| + 62 = 81$$

$$\sum_{n=1}^{5} |a_n| = 19 \quad \cdots\cdots ㉢$$

한편, 등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d(d는 음의 정수)라 하면

$$a_3 = 1$$

이므로

$$a_1 > a_2 > a_3 > 0 \geq a_4 > a_5$$

이다. 이때,

$$a_1 = 1 - 2d$$

$$a_2 = 1 - d$$

$$a_4 = 1 + d$$

$$a_5 = 1 + 2d$$

이므로 ㉢에서

$$(1-2d) + (1-d) + 1 - (1+d) - (1+2d) = 19$$

$$1 - 6d = 18$$

$$d = -3$$

따라서 $a_1 = 1 - 2 \times (-3) = 7$

(ⅰ), (ⅱ)에서

$a_1 = 7$, $d = -3$, $b_1 = 2$, $r = -2$

등차수열 $\{a_n\}$의 일반항 a_n은

$$a_n = 7 + (n-1) \times (-3) = -3n + 10$$

등비수열 $\{b_n\}$의 일반항 b_n은

$$b_n = 2 \times (-2)^{n-1}$$

따라서

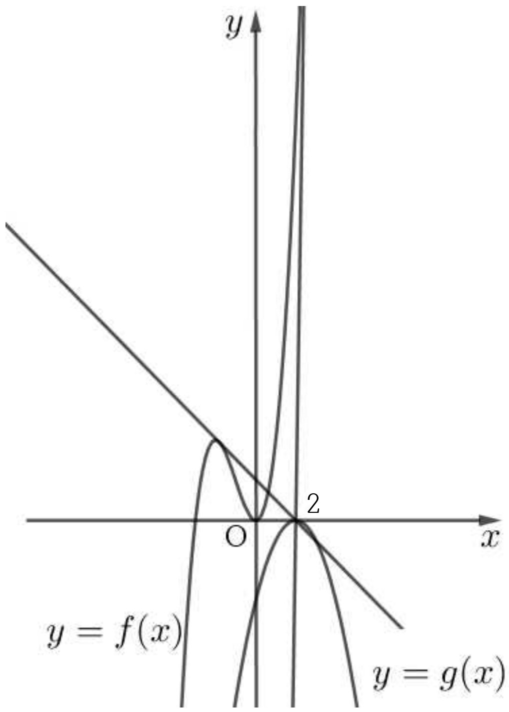
$$a_7 + b_7 = -11 + 128 = 117$$

정답 117

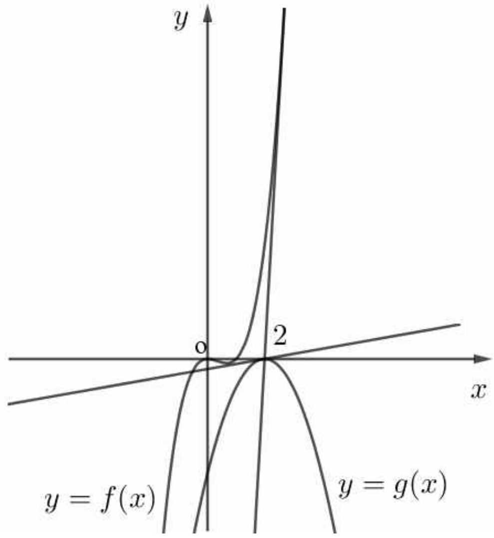
30. **출제의도** : 접선을 이용하여 함수의 그래프의 개형과 함수식을 구할 수 있으며 미분을 이용하여 부등식에 관련된 문

제를 해결할 수 있는가?

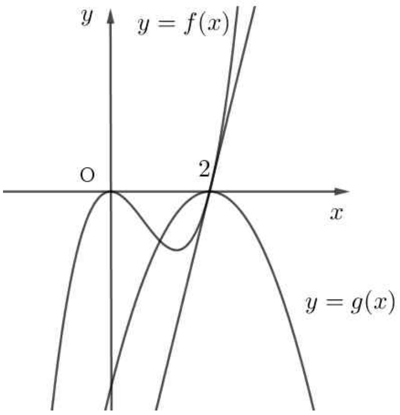
정답풀이 :
조건 (가)에서
곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $(2, 0)$에서의 접선이 x축이고 함수 $g(x)$는 최고차항의 계수가 -1인 이차함수이므로
$g(x)=-(x-2)^2$
이다.
삼차함수 $f(x)$의 최고차항의 계수가 1이므로 $x<0$인 범위에서 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 반드시 한 점에서 만난다.
조건 (다)에서
방정식 $f(x)=g(x)$는 오직 하나의 실근을 가지므로 두 곡선 $y=f(x), y=g(x)$는 $x<0$에서 만나는 점을 제외한 점에서는 만나지 않아야 한다.
또, 조건 (가)에서
곡선 $y=f(x)$ 위의 점 $(0, 0)$에서의 접선이 x축이므로 곡선 $y=f(x)$는 x축과 접해야 한다.
그러므로 함수 $y=f(x)$가 극값을 갖는 경우와 극값을 갖지 않는 경우로 나눈 후, 함수 $y=f(x)$의 그래프의 개형을 그려 점 $(2, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수를 조사하면 다음과 같다.
(ⅰ) 함수 $f(x)$가 극값을 갖는 경우
함수 $y=f(x)$가 $x=0$에서 극솟값을 가질 때, 점 $(2, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축을 포함하여 3개이다.



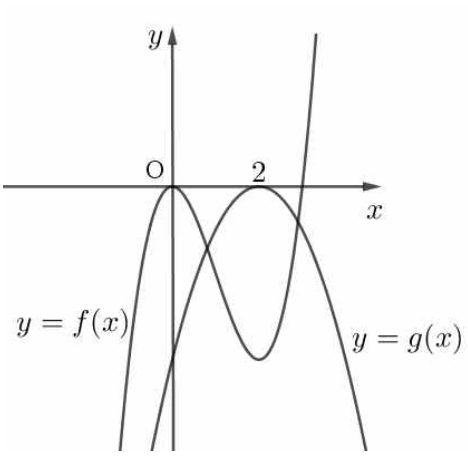
한편, 함수 $f(x)$가 $x=0$에서 극댓값을 가질 때 다음과 같이 세 가지로 나누어 생각할 수 있다.
$f(2)>0$이면 점 $(2, 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축을 포함하여 3개이다.



$f(2)=0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 다음 그림과 같이 x축 포함하여 2개이다. 하지만 이때는 두 곡선 $y=f(x)$, $y=g(x)$는 서로 다른 세 점에서 만난다.

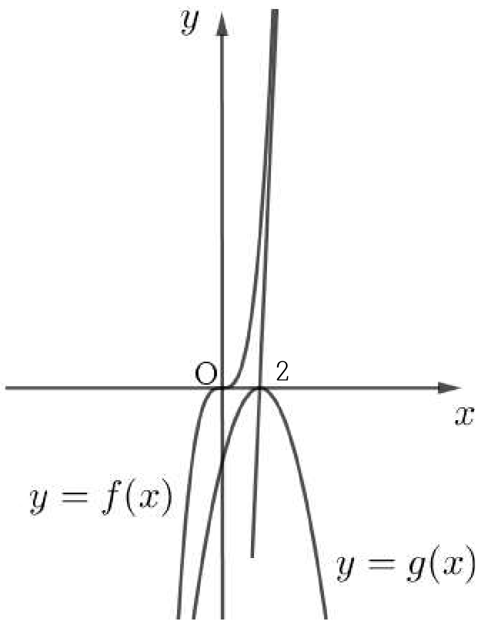


$f(2)<0$이면 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선은 x축뿐이다. 즉, 접선의 개수는 다음 그림과 같이 1개이다.



(ⅱ) 함수 $f(x)$가 극값을 갖지 않는 경우

함수 $f(x)=x^3$이고 점 $(2,\ 0)$에서 곡선 $y=f(x)$에 그은 접선의 개수는 그림과 같이 x축 포함하여 2개이다.



(ⅰ), (ⅱ)에서

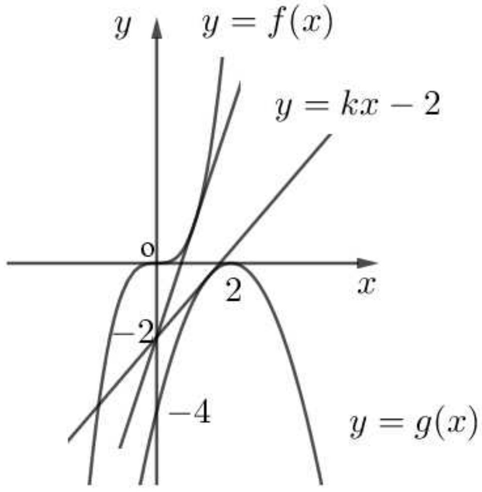
$f(x)=x^3$

이다. 한편 $x>0$인 모든 실수 x에 대하여

$g(x)\le kx-2\le f(x)$

이므로 곡선 $y=g(x)$는 직선 $y=kx-2$과 만나거나 아래쪽에 있어야 하고 곡선 $y=f(x)$는 직선 $y=kx-2$와 만나거나 위쪽에 있어야 한다.

한편 직선 $y=kx-2$는 점 $(0,\ -2)$를 지나는 직선이고 k는 이 직선의 기울기이므로 k가 최소가 되는 직선과 최대가 되는 직선은 다음 그림과 같이 접선이다.



점 $(0, -2)$를 지나고 곡선 $y=f(x)$와의 접점을 (p, p^3)이라 하면 $f'(x)=3x^2$이므로 접선의 방정식은

$y=3p^2(x-p)+p^3$

이다. 이 접선이 $(0, -2)$를 지나므로 대입하면

$-2=3p^2(-p)+p^3$

$p=1$

그러므로 $\alpha=3$

또, 점 $(0, -2)$를 지나고 곡선 $y=g(x)$의 접점을 $(q, -(q-2)^2)$이라 하면 $y=-2(x-2)$이므로 접선의 방정식은

$y=-(q-2)(x-q)-(q-2)^2$

이다. 이 접선이 $(0, -2)$를 지나므로 대입하면

$-2=-2(q-2)(-q)-(q-2)^2$

$-2=2q^2-4q-q^2+4q-4$

$q^2=2$

$q>0$이므로

$q=\sqrt{2}$

그러므로

$\beta=-2(\sqrt{2}-2)=4-2\sqrt{2}$

이다. 이때,

$\alpha-\beta=3-(4-2\sqrt{2})$

$\quad=-1+2\sqrt{2}$

따라서 $a=-1$, $b=2$이므로

$a^2+b^2=(-1)^2+2^2=5$

정답 5