

2019학년도 대학수학능력시험
수학영역 가형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ③	03. ④	04. ②	05. ③
06. ①	07. ③	08. ①	09. ⑤	10. ④
11. ④	12. ②	13. ①	14. ④	15. ⑤
16. ②	17. ①	18. ②	19. ③	20. ⑤
21. ④	22. 15	23. 26	24. 4	25. 2
26. 12	27. 8	28. 11	29. 53	30. 27

선분 AB를 2:1로 내분하는 점을 P라
하면 점 P의 y좌표는

$$\frac{2 \times (-2) + 1 \times a}{2+1} = \frac{-4+a}{3}$$

이때 점 P가 x축 위에 있으므로

$$\frac{-4+a}{3} = 0$$

따라서 $a = 4$

정답 ④

1. 출제의도 : 벡터의 연산을 할 수 있는
가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\vec{a} + 2\vec{b} &= (1, -2) + 2(-1, 4) \\ &= (1, -2) + (-2, 8) \\ &= (1-2, -2+8) \\ &= (-1, 6)\end{aligned}$$

따라서 벡터 $\vec{a} + 2\vec{b}$ 의 모든 성분의 합은
 $-1+6=5$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 로그함수의 극한값을 구할
수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + 5x}{\ln(1+3x)} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{3x}{\ln(1+3x)} \times \frac{x+5}{3} \right\} \\ &= 1 \times \frac{5}{3} = \frac{5}{3}\end{aligned}$$

정답 ③

3. 출제의도 : 좌표공간에서 선분의 내분
점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

4. 출제의도 : 확률의 덧셈정리를 이용하
여 확률을 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

두 사건 A와 B^C 이 서로 배반사건이므
로

$$A \cap B^C = \emptyset$$

$$\text{즉, } A \subset B \text{이므로 } B = A \cup (A^C \cap B)$$

이때 A와 $A^C \cap B$ 는 서로 배반사건이므
로

$$P(B) = P(A) + P(A^C \cap B)$$

$$= \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

정답 ②

5. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 그
래프를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = 2^x + 2$ 의 그래프를 x축의 방향
으로 m만큼 평행이동한 그래프를 나타
내는 함수는

$$y = 2^{x-m} + 2 \quad \dots\dots ㉠$$

함수 $y = \log_2 8x$ 의 그래프를 x축의 방향
으로 2만큼 평행이동한 그래프를 나타내
는 함수는

$y = \log_2 8(x-2)$ ㉞
 ㉞을 직선 $y=x$ 에 대하여 대칭이동한
 그래프를 나타내는 함수는
 $x = \log_2 8(y-2) = 3 + \log_2 (y-2)$
 에서
 $y = 2^{x-3} + 2$ ㉞
 ㉞과 ㉞이 일치해야하므로
 $m=3$

정답 ③

6. 출제의도 : 포물선의 정의를 이해하고 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 12x$ 의 준선의 방정식은
 $x = -3$

이고, 포물선 위의 점에서 초점까지의
 거리는 준선까지의 거리와 같으므로 점
 P와 준선 $x = -3$ 사이의 거리가 9이어
 야 한다.

따라서 점 P의 x좌표를 a라 하면

$$a - (-3) = 9$$

이므로 $a = 6$

정답 ①

7. 출제의도 : 음함수의 미분법을 이용하여 음함수 꼴로 나타낸 곡선 위의 한 점에서의 접선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$e^x - xe^y = y$ 의 양변을 x 에 대하여 미분
 하면

$$e^x - e^y - xe^y \times \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dx}$$

$$\text{이므로 } \frac{dy}{dx} = \frac{e^x - e^y}{xe^y + 1}$$

따라서 곡선 위의 점 $(0, 1)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\frac{e^0 - e^1}{0 \times e^1 + 1} = 1 - e$$

정답 ③

8. 출제의도 : 이항분포에서의 평균과 분산을 이용하여 조건을 만족시키는 n 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이항분포 $B\left(n, \frac{1}{2}\right)$ 에서

$$E(X) = \frac{n}{2}$$

이고, $V(X) = E(X^2) - \{E(X)\}^2$ 에서

$$E(X^2) - V(X) = \{E(X)\}^2 \text{이므로 주어진}$$

조건에 의하여

$$\{E(X)\}^2 = 25$$

$$\text{즉, } \frac{n^2}{4} = 25$$

따라서 $n = 10$

정답 ①

9. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f'(x) = \frac{e^{-x}}{(1+e^{-x})^2} \text{에서}$$

$$f'(-1) = \frac{e}{(1+e)^2}$$

따라서

$$g'(f(-1)) = \frac{1}{f'(-1)} = \frac{(1+e)^2}{e}$$

10. 출제의도 : 조합의 수를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

7개의 구슬이 들어 있는 주머니에서 임의로 2개의 구슬을 꺼내는 경우의 수는

$${}_7C_2 = \frac{7 \times 6}{2} = 21$$

이때 꺼낸 구슬에 적힌 두 자연수가 서로소인 경우는

(2, 3), (2, 5), (2, 7), (3, 4), (3, 5),
(3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 7), (5, 6),
(5, 7), (5, 8), (6, 7), (7, 8)

의 14가지이다.

따라서 구하는 확률은

$$\frac{14}{21} = \frac{2}{3}$$

정답 ④

11. 출제의도 : 삼각부등식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 이차방정식의 판별식을 D 라 하면 실근을 갖지 않아야 하므로

$$\frac{D}{4} = 4\cos^2\theta - 6\sin\theta < 0$$

$$2\sin^2\theta + 3\sin\theta - 2 > 0$$

$$(2\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2) > 0$$

$$\sin\theta + 2 > 0 \text{ 이므로 } \sin\theta > \frac{1}{2} \text{ 에서}$$

$$\frac{\pi}{6} < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

$$\text{따라서 } \alpha = \frac{\pi}{6}, \beta = \frac{5}{6}\pi \text{ 이므로}$$

$$3\alpha + \beta = \frac{\pi}{2} + \frac{5}{6}\pi = \frac{4}{3}\pi$$

12. 출제의도 : 중복조합의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

네 명의 학생 A, B, C, D가 받는 초콜릿의 개수를 각각 a, b, c, d 라 하면

$$a + b + c + d = 8$$

이때, 조건 (가)에 의하여 네 명의 학생이 각각 적어도 1개의 초콜릿을 받으므로 a, b, c, d 는 자연수이다.

이때, $a = a' + 1, b = b' + 1, c = c' + 1, d = d' + 1$ 이라 하면

$a' + b' + c' + d' = 4$ (a', b', c', d' 은 음이 아닌 정수)

조건 (나)에 의하여 $a' > b'$ 이어야 하므로 (i) $b' = 0$ 일 때,

$a' = 1$ 인 경우 $c' + d' = 3$ 이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_3 = {}_4C_3 = 4$

$a' = 2$ 인 경우 $c' + d' = 2$ 이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_2 = {}_3C_2 = 3$

$a' = 3$ 인 경우 $c' + d' = 1$ 이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$

$a' = 4$ 인 경우 $c' + d' = 0$ 이므로 이 경우의 수는 1

(ii) $b' = 1$ 일 때,

$a' = 2$ 인 경우 $c' + d' = 1$ 이므로 이 경우의 수는 ${}_2H_1 = {}_2C_1 = 2$

$a' = 3$ 인 경우 $c' + d' = 0$ 이므로 이 경우의 수는 1

따라서 구하는 모든 경우의 수는

$$10+3=13$$

정답 ②

13. 출제의도 : 좌표공간에서 조건을 만족시키는 평면의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건을 만족시키는 평면의 법선벡터를 $\vec{n}=(a, b, c)$ 라 하자.

주어진 직선의 방향벡터를

$\vec{u}=(1, -1, 2)$ 라 하면

$\vec{n} \perp \vec{u}$ 에서 $\vec{n} \cdot \vec{u}=0$ 이므로

$$(a, b, c) \cdot (1, -1, 2)=0$$

$$a-b+2c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{A}$$

또, 두 점 $(2, 0, 5), (1, 2, -1)$ 이 평면 위에 있으므로

$$\vec{n} \perp (1, -2, 6) \text{에서 } \vec{n} \cdot (1, -2, 6)=0$$

$$a-2b+6c=0 \quad \cdots \cdots \textcircled{B}$$

$\textcircled{A}-\textcircled{B}$ 을 하면

$$b-4c=0 \text{에서 } b=4c$$

$b=4c$ 를 $\textcircled{A}$ 에 대입하면

$$a=b-2c=2c$$

즉, $a:b:c=2c:4c:c=2:4:1$ 이므로

조건을 만족시키는 평면의 법선벡터를 $(2, 4, 1)$ 로 놓을 수 있다.

이때 평면의 방정식은

$$2(x-2)+4y+(z-5)=0$$

에서

$$2x+4y+z-9=0$$

이 식에 $y=0, z=0$ 을 대입하면

$$x=\frac{9}{2} \text{이므로 조건을 만족시키는 평면이}$$

x 축과 만나는 점의 x 좌표는 $\frac{9}{2}$ 이다.

정답 ①

14. 출제의도 : 그래프를 이용하여 지수 부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{8}\right)^{g(x)}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{f(x)g(x)} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{3g(x)}$$

$$f(x)g(x) \leq 3g(x)$$

$$\{f(x)-3\}g(x) \leq 0$$

(i) $f(x)-3 \geq 0, g(x) \leq 0$ 인 경우
 $x \leq 1$

(ii) $f(x)-3 \leq 0, g(x) \geq 0$ 인 경우
 $3 \leq x \leq 5$

따라서 조건을 만족시키는 모든 자연수는 1, 3, 4, 5이므로 구하는 합은

$$1+3+4+5=13$$

정답 ④

15. 출제의도 : 정규분포에서의 확률을 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

이 회사 직원들의 이 날의 출근 시간을 확률변수 X 라 하면 X 는 정규분포 $N(66, 4, 15^2)$ 을 따른다.

이때,

$$P(X \geq 73) = P\left(Z \geq \frac{73-66.4}{15}\right)$$

$$= P(Z \geq 0.44)$$

$$= 0.5 - P(0 \leq Z \leq 0.44)$$

$$= 0.5 - 0.17 = 0.33$$

따라서 구하는 확률은

$$0.33 \times 0.4 + 0.67 \times 0.2 = 0.266$$

정답 ⑤

16. 출제의도 : 조건을 만족시키는 함수 $f(x)$ 를 구하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$2f(x) + \frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} \quad \dots\dots\textcircled{\text{A}}$$

$\textcircled{\text{A}}$ 에서 x 대신 $\frac{1}{x}$ 를 대입하면

$$2f\left(\frac{1}{x}\right) + x^2f(x) = x + x^2$$

양변을 $2x^2$ 으로 나누면

$$\frac{1}{x^2}f\left(\frac{1}{x}\right) + \frac{1}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{2} \quad \dots\dots\textcircled{\text{B}}$$

$\textcircled{\text{A}} - \textcircled{\text{B}}$ 을 하면

$$\frac{3}{2}f(x) = \frac{1}{2x} + \frac{1}{x^2} - \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3}$$

따라서

$$\begin{aligned} \int_{\frac{1}{2}}^2 f(x) dx &= \int_{\frac{1}{2}}^2 \left(\frac{1}{3x} + \frac{2}{3x^2} - \frac{1}{3} \right) dx \\ &= \left[\frac{1}{3} \ln|x| - \frac{2}{3x} - \frac{1}{3}x \right]_{\frac{1}{2}}^2 \\ &= \left(\frac{1}{3} \ln 2 - 1 \right) - \left(\frac{1}{3} \ln \frac{1}{2} - \frac{3}{2} \right) \\ &= \frac{2 \ln 2}{3} + \frac{1}{2} \end{aligned}$$

정답 ②

17. 출제의도 : 조합의 수와 순열의 수를 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 개수를 구하는 과정의 빈칸에 알맞은 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(i)에서 조건을 만족시키는 경우의 수는 집합 X 의 6개의 원소 중에서 서로 다른 5개를 택하는 경우의 수와 같으므로

$$p = {}_6C_5 = 6$$

(ii)에서 $f(k)$ 의 값으로 선택할 수 있는 경우의 수는 집합 A 의 원소의 개수와 같으므로

$$q = 5$$

(iii)에서 원소의 개수가 5인 집합 A 에서 A 로의 일대일 대응의 개수는 $5!$ 이므로

$$r = 5! = 120$$

$$\text{따라서 } p + q + r = 6 + 5 + 120 = 131$$

정답 ①

18. 출제의도 : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내고 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

직각삼각형 ABC에서

$$\overline{AB} = 1, \angle CAB = \theta \text{이므로}$$

$$\overline{AC} = \sec\theta, \overline{BC} = \tan\theta$$

이때 직선 CD가 $\angle ACB$ 를 이등분하므로

$$\overline{AD} : \overline{BD} = \overline{AC} : \overline{BC}$$

$$\text{즉, } \overline{AD} = 1 \times \frac{\sec\theta}{\sec\theta + \tan\theta} = \frac{1}{1 + \sin\theta} \text{이므로}$$

로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{1 + \sin\theta} \right)^2 \times \theta$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{(1 + \sin\theta)^2}$$

$$\text{한편, } \overline{CE} = \sec\theta - \frac{1}{1 + \sin\theta} \text{이므로}$$

$$T(\theta) = \frac{1}{2} \times \tan\theta \times \left(\sec\theta - \frac{1}{1 + \sin\theta} \right) \times \sin\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$$

$$= \frac{1}{2} \sin\theta \left(\sec\theta - \frac{1}{1 + \sin\theta} \right)$$

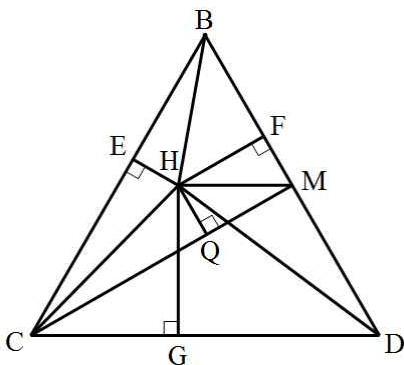
따라서

$$\begin{aligned}
 & \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\{S(\theta)\}^2}{T(\theta)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{(1+\sin\theta)^2} \right\}^2}{\frac{1}{2} \sin\theta \left(\sec\theta - \frac{1}{1+\sin\theta} \right)} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{\sin\theta} \times \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{\theta}{\sin\theta + 1 - \cos\theta} \right\} \\
 &= \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \left\{ \frac{1}{2} \times \frac{\theta}{\sin\theta} \times \frac{\cos\theta}{(1+\sin\theta)^3} \right. \\
 &\quad \left. \times \frac{1}{\frac{\sin\theta}{\theta} + \frac{1-\cos\theta}{\theta}} \right\} \\
 &= \frac{1}{2} \times 1 \times \frac{1}{1} \times \frac{1}{1+0} = \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

정답 ②

19. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 H에서 세 선분 BC, BD, CD에 내린 수선의 발을 각각 E, F, G라 하면 주어진 조건에 의하여

$$\overline{HE} = k, \overline{HF} = 2k, \overline{HG} = 3k$$

로 놓을 수 있다.

이때 정삼각형 BCD의 넓이는

$$\frac{1}{2} \times 12 \times (k + 2k + 3k) = 36k$$

이고, 한 변의 길이가 12인 정삼각형의

$$\text{넓이는 } \frac{\sqrt{3}}{4} \times 12^2 = 36\sqrt{3} \text{ 이므로}$$

$$36k = 36\sqrt{3} \text{ 에서 } k = \sqrt{3}$$

한편 점 M은 선분 BD의 중점이므로 점 M과 선분 CD사이의 거리는 $3\sqrt{3}$ 이고, $\overline{HG} = 3\sqrt{3}$ 이므로 $\overline{HM} \parallel \overline{CD}$ 이다.

따라서

$$\triangle CHM = \triangle DHM$$

이므로

$$\frac{1}{2} \times \overline{HM} \times \overline{HG} = \frac{1}{2} \times \overline{DM} \times \overline{HF}$$

$$\overline{HM} \times 3\sqrt{3} = 6 \times 2\sqrt{3}$$

$$\overline{HM} = 4$$

한편 $\overline{AH} \perp (\text{평면BCD})$, $\overline{AQ} \perp \overline{CM}$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$$\overline{HQ} \perp \overline{CM}$$

이때 사각형 HQMF는 직사각형이므로

$$\overline{QM} = \overline{HF} = 2\sqrt{3}$$

직각삼각형 HQM에서

$$\overline{HQ} = \sqrt{\overline{HM}^2 - \overline{QM}^2} = \sqrt{16 - 12} = 2$$

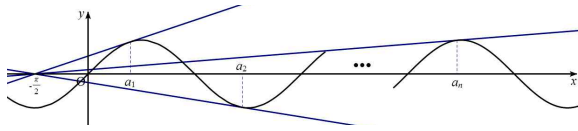
따라서 직각삼각형 AQH에서

$$\overline{AQ} = \sqrt{\overline{AH}^2 + \overline{HQ}^2} = \sqrt{3^2 + 2^2} = \sqrt{13}$$

정답 ③

20. 출제의도 : 삼각함수의 그래프를 이용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

정답풀이 :



ㄱ. $(\sin x)' = \cos x$ 이므로

점 $(a_n, \sin a_n)$ 에서의 접선의 기울기는

$$\cos a_n \quad \dots\dots \textcircled{ㄱ}$$

이 접선이 두 점 $(-\frac{\pi}{2}, 0), (a_n, \sin a_n)$

을 지나므로 기울기는

$$\frac{\sin a_n - 0}{a_n + \frac{\pi}{2}} \quad \dots\dots \textcircled{ㄴ}$$

ㄱ, ㄴ에서

$$\cos a_n = \frac{\sin a_n}{a_n + \frac{\pi}{2}}$$

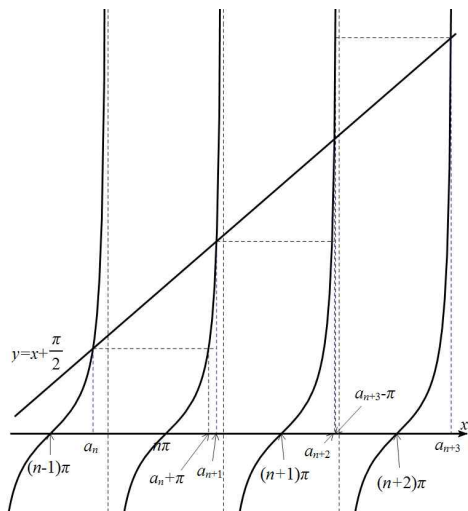
$$\text{이므로 } \frac{\sin a_n}{\cos a_n} = a_n + \frac{\pi}{2}$$

따라서 $\tan a_n = a_n + \frac{\pi}{2}$ (참)

ㄴ. ㄱ에서 a_n 은 곡선 $y = \tan x$ 와 직선

$y = x + \frac{\pi}{2}$ 의 교점의 x 좌표를 작은 수부

터 크기순으로 나열한 것이다.



위 그림에서 $a_{n+1} > a_n + \pi$ 이므로

$a_{n+1} - a_n > \pi$ 임을 알 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned} \tan a_{n+2} - \tan a_n &= \left(a_{n+2} + \frac{\pi}{2}\right) - \left(a_n + \frac{\pi}{2}\right) \\ &= a_{n+2} - a_n \\ &= (a_{n+2} - a_{n+1}) + (a_{n+1} - a_n) \\ &> \pi + \pi = 2\pi \quad (\text{참}) \end{aligned}$$

ㄷ. ㄴ의 그림에서

$$a_{n+1} - (a_n + \pi) > (a_{n+3} - \pi) - a_{n+2}$$

이므로

$$a_{n+1} - a_n > a_{n+3} - a_{n+2}$$

따라서

$$a_{n+1} + a_{n+2} > a_n + a_{n+3} \quad (\text{참})$$

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 : 치환적분을 이용하여 조건을 만족시키는 함수의 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$\begin{aligned} \int 2\{f(x)\}^2 f'(x) dx \\ = \int \{f(2x+1)\}^2 f'(2x+1) dx \end{aligned}$$

이므로

$$\frac{2}{3}\{f(x)\}^3 = \frac{1}{3}\{f(2x+1)\}^3 \times \frac{1}{2} + C$$

(단, C 는 적분상수)

$$\begin{aligned} \{f(2x+1)\}^3 &= 4\{f(x)\}^3 + C' \quad (C' = -6C) \\ \dots\dots \textcircled{ㄱ} \end{aligned}$$

ㄱ에 $x = -1$ 을 대입하면

$$\{f(-1)\}^3 = 4\{f(-1)\}^3 + C'$$

$$\text{에서 } C' = -3\{f(-1)\}^3 \quad \dots\dots \textcircled{ㄴ}$$

㉞에 $x = -\frac{1}{8}$ 을 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 = 4\left\{f\left(-\frac{1}{8}\right)\right\}^3 + C' = 4 + C'$$

㉞에 $x = \frac{3}{4}$ 을 대입하면

$$\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 = 4\left\{f\left(\frac{3}{4}\right)\right\}^3 + C' = 16 + 5C'$$

㉞에 $x = \frac{5}{2}$ 를 대입하면

$$\{f(6)\}^3 = 4\left\{f\left(\frac{5}{2}\right)\right\}^3 + C'$$

$$2^3 = 64 + 21C'$$

$$C' = -\frac{8}{3} \quad \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

㉞, ㉞에서

$$-3\{f(-1)\}^3 = -\frac{8}{3}$$

이므로

$$\{f(-1)\}^3 = \frac{8}{9}$$

$$\text{따라서 } f(-1) = \frac{2\sqrt[3]{3}}{3}$$

정답 ④

22. 출제의도 : 순열의 수와 조합의 수를 계산할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} & {}_6P_2 - {}_6C_2 \\ &= 6 \times 5 - \frac{6 \times 5}{2} \end{aligned}$$

$$= 30 - 15$$

$$= 15$$

정답 15

23. 출제의도 : 삼각함수의 값을 구할

수 있는가?

정답풀이 :

$$1 + \tan^2 \theta = \sec^2 \theta \text{ 이므로}$$

$$\sec^2 \theta = 1 + 5^2 = 26$$

정답 26

24. 출제의도 : 좌표평면 위의 운동에서의 가속도의 크기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{dx}{dt} = 4\sin 4t, \quad \frac{dy}{dt} = \cos 4t \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 16\sin^2 4t + \cos^2 4t \\ &= 15\sin^2 4t + 1 \end{aligned}$$

따라서 점 P의 속력은 $\sqrt{15\sin^2 4t + 1}$ 이므로 속력이 최대가 되기 위해서는

$$\sin^2 4t = 1 \text{ 즉, } \cos^2 4t = 0$$

또한,

$$\frac{d^2x}{dt^2} = 16\cos 4t, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -4\sin 4t \text{ 이므로}$$

$$\begin{aligned} \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 \\ = 256\cos^2 4t + 16\sin^2 4t \end{aligned}$$

따라서 점 P의 가속도의 크기는

$$\sqrt{256 \times 0 + 16 \times 1} = 4$$

정답 4

25. 출제의도 : 부분적분을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\cos(\pi - x) = -\cos x$ 이므로

$$\int_0^{\pi} x \cos(\pi - x) dx = \int_0^{\pi} x (-\cos x) dx$$

이때,

$$u(x) = x, \quad v'(x) = -\cos x$$

$$u'(x) = 1, \quad v(x) = -\sin x$$

라 하면

$$\int_0^{\pi} x \cos(\pi - x) dx$$

$$= \int_0^{\pi} x (-\cos x) dx$$

$$= [x(-\sin x)]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \sin x dx$$

$$= [-\cos x]_0^{\pi}$$

$$= -\cos \pi + \cos 0 = 2$$

정답 2

26. 출제의도 : 모평균을 추정할 수 있는가?

정답풀이 :

$\bar{x} = 75$ 일 때, 신뢰도 95%의 신뢰구간은

$$75 - 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq 75 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$\bar{x} = 77$ 일 때, 신뢰도 99%의 신뢰구간은

$$77 - 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \leq m \leq 77 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

따라서,

$$b = 75 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

$$d = 77 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}}$$

이므로

$$d - b = \left(77 + 2.58 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \right) - \left(75 + 1.96 \times \frac{\sigma}{\sqrt{16}} \right)$$

$$= 2 + 0.155\sigma = 3.86$$

$$0.155\sigma = 1.86$$

$$\sigma = 12$$

정답 12

27. 출제의도 : 두 사건이 서로 독립이 될 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A = \{1, 3, 5\} \text{이므로 } P(A) = \frac{1}{2}$$

(i) $m = 1$ 일 때, $B = \{1\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1\}, \quad P(B) = \frac{1}{6}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

따라서 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이 아니다.

(ii) $m = 2$ 일 때 $B = \{1, 2\}$ 이므로

$$A \cap B = \{1\}, \quad P(B) = \frac{1}{3}$$

$$\text{따라서 } P(A \cap B) = \frac{1}{6} \text{이므로}$$

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

즉, 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이다

(iii) $m = 3$ 일 때 $B = \{1, 3\}$

$$A \cap B = \{1, 3\}, \quad P(B) = \frac{1}{3}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

따라서 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이 아니다.

(iv) $m = 4$ 일 때 $B = \{1, 2, 4\}$

$$A \cap B = \{1\}, \quad P(B) = \frac{1}{2}, \quad P(A \cap B) = \frac{1}{6}$$

따라서 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이 아니다.

(v) $m = 5$ 일 때 $B = \{1, 5\}$

$$A \cap B = \{1, 5\}, P(B) = \frac{1}{3}, P(A \cap B) = \frac{1}{3}$$

따라서 $P(A \cap B) \neq P(A)P(B)$ 이므로 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이 아니다.

(vi) $m=6$ 일 때 $B = \{1, 2, 3, 6\}$

$$A \cap B = \{1, 3\}, P(B) = \frac{2}{3}$$

따라서 $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$ 이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

즉, 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이다.

(i)~(vi)에 의하여 모든 m 의 값의 합은 $2+6=8$

정답 8

28. 출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 두 선분의 길이의 합의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

타원 $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{33} = 1$ 의 정의에 의하여

$$\overline{F'P} + \overline{PQ} + \overline{FQ} = 2 \times 7 = 14$$

이므로

$$\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P}$$

따라서 $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 가 최대가 되기 위해서는 $\overline{F'P}$ 가 최소가 되어야 한다.

원 $x^2 + (y-3)^2 = 4$ 의 중심을 $O'(0, 3)$ 이라 하면 $F'(-4, 0)$ 이므로

$$\begin{aligned} \overline{F'P} &\geq \overline{F'O'} - 2 \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2} - 2 \\ &= 3 \end{aligned}$$

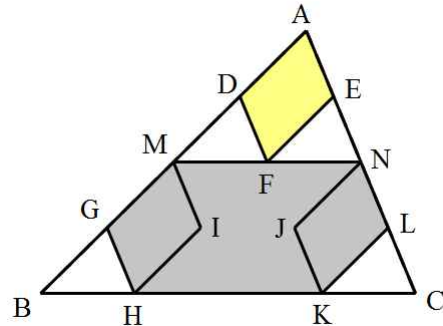
$$\overline{PQ} + \overline{FQ} = 14 - \overline{F'P} \leq 14 - 3 = 11$$

즉, $\overline{PQ} + \overline{FQ}$ 의 최댓값은 11이다.

정답 11

29. 출제의도 : 벡터의 위치벡터를 이용하여 점이 나타내는 영역의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :



두 선분 AB, AC의 중점을 각각 M, N이라 하고, 두 선분 AM, AN, MN의 중점을 각각 D, E, F라 하자. 또, 두 선분 MB, NC의 중점을 각각 G, L이라 하자.

이때 $\overrightarrow{AS} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AR}$ 라 하면 점 S는

위 그림의 평행사변형 ADFE의 내부(경계선 포함)에 있다.

또, 점 Q가 점 B에 있으면

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AM}$ 이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 MGHI의 내부(경계선 포함)에 있다.

마찬가지로 점 Q가 점 C에 있으면

$\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{AS} + \overrightarrow{AN}$ 이므로 점 X는 위 그림의 평행사변형 NJKL의 내부(경계선 포함)에 있다.

한편, $\overrightarrow{AT} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ}$ 라 하면 점 T는 선분

MN 위를 움직이므로 점 X가 나타내는 영역은 위 그림의 육각형 MGHKLN의

내부(경계선 포함)에 있다.

이때 삼각형 AMN의 넓이는 $\frac{9}{4}$ 이고, 두

삼각형 GBH, LKC의 넓이는 각각 $\frac{9}{16}$

이므로 구하는 넓이는

$$9 - \frac{9}{4} - 2 \times \frac{9}{16} = \frac{45}{8}$$

따라서 $p=8$, $q=45$ 이므로

$$p+q=53$$

정답 53

[다른 풀이]

세 변 AB, BC, CA의 중점을 각각 M, K, N이라 하자.

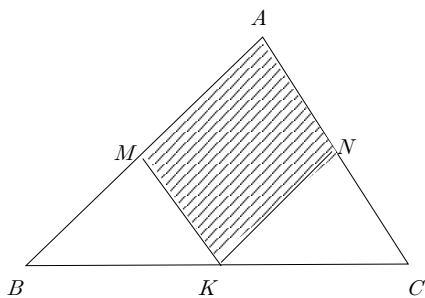
또한,

$$\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AP} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AR} \cdots \textcircled{A}$$

라 하면 $\overrightarrow{AD}$ 는 선분 AM, AN 위의 두 점을 P', R'이라 할 때,

$$\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AP'} + \overrightarrow{AR'}$$

이므로 $\textcircled{A}$ 이 나타내는 점 D는 그림과 같이 빗금친 평행사변형의 내부(경계선 포함)에 있다.

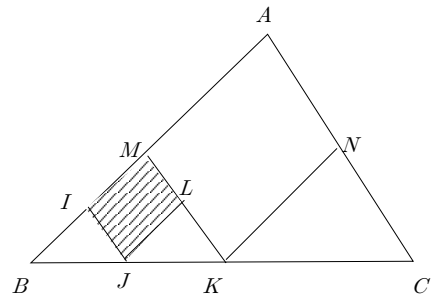


$$\begin{aligned} \overrightarrow{AX} &= \frac{1}{4}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2}(\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{AR}) \right\} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AQ} \end{aligned}$$

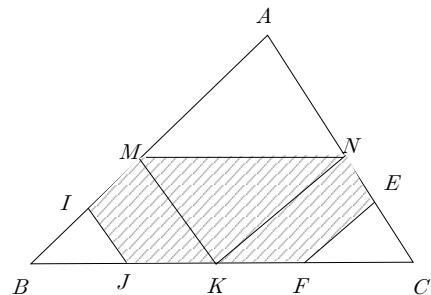
$$= \frac{\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AQ}}{2}$$

따라서 점 X는 선분 DQ의 중점이다.

이때 점 Q가 B에 있을 경우 세 선분 BM, BK, MK의 중점을 각각 I, J, L이라 하면 점 X가 존재하는 영역은 그림과 같다.



따라서 점 Q가 변 BC 위를 움직이므로 두 변 CN, CL의 중점을 각각 E, F라 하면 위의 빗금친 영역 IJLM이 움직이는 영역이 점 X가 존재하는 영역으로 다음 그림과 같다.



이때, 삼각형 MKN의 넓이는

$$9 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{4}$$

사각형 IJLM의 넓이는

$$\frac{9}{4} - \frac{9}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{27}{16}$$

사각형 LFEN의 넓이도 $\frac{27}{16}$ 이므로 구하고자 하는 점 X가 나타내는 영역의 넓이는

$$\frac{9}{4} + 2 \times \frac{27}{16} = \frac{45}{8}$$

즉, $p=8, q=45$ 이므로
 $p+q=53$

30. 출제의도 : 주어진 조건을 만족시키는 함수에 대하여 함숫값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$g'(x) = \frac{-\cos(f(x)) \times f'(x)}{\{2 + \sin(f(x))\}^2} \text{ 이므로}$$

$$g'(x) = 0 \text{ 에서}$$

$$\cos(f(x)) = 0 \text{ 또는 } f'(x) = 0$$

$$\text{이때, } \cos(f(x)) = 0 \text{ 에서}$$

$$f(x) = \pm \frac{\pi}{2} \text{ 또는 } f(x) = \pm \frac{3}{2}\pi \text{ 또는}$$

$$f(x) = \pm \frac{5}{2}\pi \dots$$

그런데 조건 (가)에서

$$\frac{1}{g(\alpha_1)} = \frac{1}{g(0)} = 2 + \sin(f(0)) = \frac{5}{2} \text{ 이므로}$$

$$\sin(f(0)) = \frac{1}{2}$$

$$\text{이때 } 0 < f(0) < \frac{\pi}{2} \text{ 이므로}$$

$$f(0) = \frac{\pi}{6} \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

$$\text{따라서 } \cos(f(\alpha_1)) = \cos(f(0)) \neq 0 \text{ 이므로}$$

$$f'(0) = 0 \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

$\textcircled{\ominus}, \textcircled{\ominus}$ 에서

$$f(x) = 6\pi x^3 + px^2 + \frac{\pi}{6} \text{ (} p \text{는 상수)}$$

로 놓으면 조건 (나)에서

$$\frac{1}{g(\alpha_5)} - \frac{1}{g(\alpha_2)}$$

$$= \sin(f(\alpha_5)) - \sin(f(\alpha_2)) = \frac{1}{2} \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

$$\text{이때, } \cos(f(x)) = 0 \text{이면}$$

$$\sin(f(x)) = -1 \text{ 또는 } \sin(f(x)) = 1$$

이므로 $\textcircled{\ominus}$ 을 만족시키기 위해서는

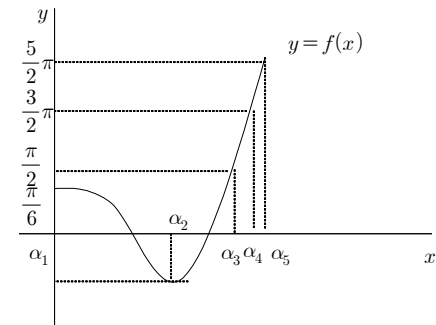
$$f'(\alpha_2) = 0, f'(\alpha_5) \neq 0$$

또는

$$f'(\alpha_2) \neq 0, f'(\alpha_5) = 0$$

(i) $f'(\alpha_2) = 0, f'(\alpha_5) \neq 0$ 인 경우

$x \geq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



$$f(\alpha_5) = \frac{5}{2}\pi \text{ 이므로}$$

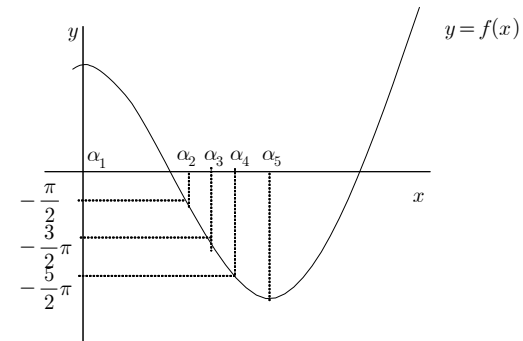
$$\sin(f(\alpha_5)) - \sin(f(\alpha_2))$$

$$= 1 - \sin(f(\alpha_2)) = \frac{1}{2}$$

$$\sin(f(\alpha_2)) = \frac{1}{2} \dots\dots\textcircled{\ominus}$$

그런데, $-\frac{\pi}{2} < f(\alpha_2) < \frac{\pi}{6}$ 이므로 $\textcircled{\ominus}$ 을 만족시키는 α_2 는 존재하지 않는다.

(ii) $f'(\alpha_2) \neq 0, f'(\alpha_5) = 0$ 인 경우 $x \geq 0$ 에서 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 다음과 같다.



이때

$$\sin(f(\alpha_2)) = \sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$$

이므로 $\sin(f(\alpha_5)) = -\frac{1}{2}$ 이어야 한다.

따라서, $\cos(f(\alpha_5)) \neq 0$ 이므로

$$f'(\alpha_5) = 0$$

이고 위의 그림에서

$$-\frac{7}{2}\pi < f(\alpha_5) < -\frac{5}{2}\pi$$

$$\text{이므로 } f(\alpha_5) = -3\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\text{즉, } f'(x) = 18\pi x^2 + 2px = 2x(9\pi x + p) = 0$$

에서 $\alpha_5 = -\frac{p}{9\pi}$ 이므로

$$\begin{aligned} f(\alpha_5) &= f\left(-\frac{p}{9\pi}\right) \\ &= 6\pi \times \left(-\frac{p}{9\pi}\right)^3 + p\left(-\frac{p}{9\pi}\right)^2 + \frac{\pi}{6} \\ &= -3\pi + \frac{\pi}{6} \end{aligned}$$

$$\frac{-2p^3}{3^5\pi^2} + \frac{p^3}{3^4\pi^2} = -3\pi, \quad p^3 3^5\pi^2 = -3\pi$$

$$p^3 = -3^6\pi^3$$

따라서 $p = -3^2\pi = -9\pi$ 이므로

$$f(x) = 6\pi x^3 - 9\pi x^2 + \frac{\pi}{6}$$

$$f'(x) = 18\pi x^2 - 18\pi x$$

따라서

$$f'\left(-\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{2}\pi + 9\pi = \frac{27}{2}\pi$$

$$f\left(-\frac{1}{2}\right) = -\frac{3}{4}\pi - \frac{9}{4}\pi + \frac{\pi}{6} = -3\pi + \frac{\pi}{6}$$

$$\sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \sin\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) = \cos\left(-3\pi + \frac{\pi}{6}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\begin{aligned} g'\left(-\frac{1}{2}\right) &= \frac{-\cos\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right) \times f'\left(-\frac{1}{2}\right)}{\left\{2 + \sin\left(f\left(-\frac{1}{2}\right)\right)\right\}^2} \\ &= \frac{-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \times \frac{27}{2}\pi}{\left(2 - \frac{1}{2}\right)^2} \\ &= \frac{27\sqrt{3}}{4}\pi \times \frac{4}{9} = 3\sqrt{3}\pi \end{aligned}$$

따라서

$$a^2 = (3\sqrt{3})^2 = 27$$

정답 27