

01. ⑤	02. ②	03. ⑤	04. ④	05. ③
06. ⑤	07. ①	08. ①	09. ②	10. ③
11. ④	12. ④	13. ③	14. ①	15. ④
16. ②	17. ②	18. ③	19. ①	20. ⑤
21. ④	22. 10	23. 6	24. 16	25. 7
26. 11	27. 32	28. 12	29. 19	
30. 216				

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin x \, dx &= [-2\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} \\ &= 0 - (-2) \\ &= 2\end{aligned}$$

정답 ⑤

1. 출제의도 : 벡터의 연산을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (1, 3) - (5, -6) \\ &= (-4, 9)\end{aligned}$$

따라서 모든 성분의 합은
 $-4 + 9 = 5$

정답 ⑤

2. 출제의도 : 지수함수와 로그함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned}\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{\ln(1 + 3x)} \\ &= 2 \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{6x} - 1}{6x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\ln(1 + 3x)} \\ &= 2 \times 1 \times 1 \\ &= 2\end{aligned}$$

정답 ②

3. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

4. 출제의도 : 확률의 계산식에서 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(B^C) = \frac{1}{3} \text{이므로}$$

$$P(B) = 1 - P(B^C)$$

$$= 1 - \frac{1}{3}$$

$$= \frac{2}{3}$$

$$\text{또, } P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} P(B)$$

$$= \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

이때, 두 사건 A 와 B 는 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

$$\text{즉, } P(A)P(B) = \frac{1}{3}$$

정답 ④

5. 출제의도 : 중복순열의 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

일의 자리 수는 5이어야 하므로
나머지 3자리에 들어갈 수 있는 수의 개
수는 중복을 허락하므로 모두 5개씩이
다.

따라서 구하는 경우의 수는

$$5 \prod_3 = 5^3 = 125$$

정답 ③

6. 출제의도 : 역함수의 미분법을 이용하
여 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(0) = 1 \text{이므로}$$

$$g(1) = 0$$

$$\text{또, } f'(x) = 3x^2 + 1 \text{이므로}$$

$$f'(0) = 1$$

따라서

$$f(g(x)) = x \text{에서}$$

$$f'(g(x))g'(x) = 1 \text{이므로}$$

$$g'(1) = \frac{1}{f'(g(1))}$$

$$= \frac{1}{f'(0)} = 1$$

정답 ⑤

7. 출제의도 : 독립시행의 확률을 이용하
여 확률은 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주사위를 한 번 던져서 4의 눈이 나올 확
률은

$$\frac{1}{6}$$

따라서 구하는 확률은

$$\begin{aligned} {}_3C_1 \left(\frac{1}{6}\right)^1 \left(\frac{5}{6}\right)^2 &= 3 \times \frac{5^2}{6^3} \\ &= \frac{25}{72} \end{aligned}$$

정답 ①

8. 출제의도 : 좌표공간에서 선분의 외분
점을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 A(1, a, -6), B(-3, 2, b)에 대
하여 선분 AB를 3:2로 외분하는 점의
좌표는

$$\left(\frac{3 \times (-3) - 2 \times 1}{3 - 2}, \frac{3 \times 2 - 2 \times a}{3 - 2}, \frac{3 \times b - 2 \times (-6)}{3 - 2} \right)$$

$$\text{즉, } (-11, 6 - 2a, 3b + 12)$$

이 점이 x축 위에 있으므로

$$6 - 2a = 0, 3b + 12 = 0$$

$$\text{에서 } a = 3, b = -4$$

따라서

$$a + b = 3 + (-4) = -1$$

정답 ①

9. 출제의도 : 부분적분법을 이용하여 정
적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\ln \frac{x}{e} = \ln x - 1 \text{이므로}$$

$$\int_1^e \ln \frac{x}{e} dx$$

$$= \int_1^e \ln x dx - \int_1^e dx$$

한편, $\int_1^e \ln x dx$ 에서

$u(x) = \ln x, v'(x) = 1$ 로 놓으면

$u'(x) = \frac{1}{x}, v(x) = x$ 이므로

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln x dx &= [x \ln x - x]_1^e \\ &= e \ln e - e - 0 + 1 = 1\end{aligned}$$

따라서

$$\begin{aligned}\int_1^e \ln \frac{x}{e} dx &= \int_1^e \ln x dx - \int_1^e dx \\ &= 1 - [x]_1^e \\ &= 1 - (e - 1) = 2 - e\end{aligned}$$

정답 ②

직선 $x = t (0 \leq t \leq 1)$ 을 포함하고 x 축에 수직인 평면으로 자른 단면의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$\begin{aligned}S(t) &= (\sqrt{t} + 1)^2 \\ &= t + 2\sqrt{t} + 1\end{aligned}$$

따라서 구하는 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned}V &= \int_0^1 S(t) dt \\ &= \int_0^1 (t + 2\sqrt{t} + 1) dt \\ &= \left[\frac{1}{2}t^2 + \frac{4}{3}t\sqrt{t} + t \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2} + \frac{4}{3} + 1 \\ &= \frac{17}{6}\end{aligned}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 좌표평면 위를 움직이는 점의 속력을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{dx}{dt} = 1 + \frac{2}{t^2},$$

$$\frac{dy}{dt} = 2 - \frac{1}{t^2}$$

이므로 시각 $t = 1$ 에서 점 P의 속도는 $(3, 1)$

따라서 시각 $t = 1$ 에서 점 P의 속력은 $\sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$

정답 ③

11. 출제의도 : 정적분을 이용하여 입체 도형의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

12. 출제의도 : 두 평면이 이루는 예각의 크기에 대한 코사인 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

평면 $2x + 2y - z + 5 = 0$ 의 법선벡터를 $\vec{n}_1$

라 하면

$$\vec{n}_1 = (2, 2, -1)$$

xy 평면의 법선벡터를 $\vec{n}_2$ 라 하면

$$\vec{n}_2 = (0, 0, 1)$$

로 놓을 수 있다.

따라서

$$\begin{aligned}\cos \theta &= \frac{|\vec{n}_1 \cdot \vec{n}_2|}{|\vec{n}_1| |\vec{n}_2|} \\ &= \frac{|2 \times 0 + 2 \times 0 + (-1) \times 1|}{\sqrt{2^2 + 2^2 + (-1)^2} \sqrt{0^2 + 0^2 + 1}}\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{3 \times 1}$$

$$= \frac{1}{3}$$

정답 ④

13. 출제의도 : 표본평균의 분포를 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

확률변수 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(0, \left(\frac{4}{3}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$$Z = \frac{\bar{X} - 0}{\frac{4}{3}}$$

준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

또, 확률변수 $\bar{Y}$ 는 정규분포 $N\left(3, \left(\frac{1}{2}\right)^2\right)$ 을 따르므로

$$Z = \frac{\bar{Y} - 3}{\frac{1}{2}}$$

준정규분포 $N(0, 1)$ 을 따른다.

$$P(\bar{X} \geq 1) = P(\bar{Y} \leq a) \text{에서}$$

$$P\left(Z \geq \frac{1-0}{\frac{4}{3}}\right) = P\left(Z \leq \frac{a-3}{\frac{1}{2}}\right)$$

$$P\left(Z \geq \frac{3}{4}\right) = P(Z \leq 2(a-3))$$

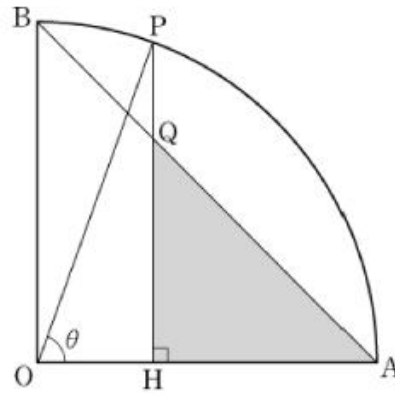
$$\frac{3}{4} + 2(a-3) = 0 \text{에서}$$

$$a = \frac{21}{8}$$

정답 ③

14. 출제의도 : 삼각함수를 이용하여 도형의 넓이를 나타내고, 그 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$$\overline{OH} = \cos\theta \text{이므로}$$

$$\overline{HA} = 1 - \cos\theta$$

직각삼각형 OAB에서

$$\overline{OA} = \overline{OB} \text{이므로}$$

$$\angle OAB = \angle OBA \dots\dots ①$$

이때, $\overline{OB} \parallel \overline{PH}$ 이므로

$$\angle OBA = \angle HQA \dots\dots ②$$

①, ②에서

$$\angle HAQ = \angle HQA$$

즉, 직각삼각형 HAQ에서

$$\overline{HA} = \overline{HQ}$$

따라서 삼각형 AQH의 넓이 $S(\theta)$ 는

$$S(\theta) = \frac{(1 - \cos\theta)^2}{2}$$

이므로

$$\lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{S(\theta)}{\theta^4}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos\theta)^2}{2\theta^4}$$

$$= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{(1 - \cos\theta)^2(1 + \cos\theta)^2}{2\theta^4(1 + \cos\theta)^2}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{\theta \rightarrow 0+} \frac{1}{2(1+\cos\theta)^2} \times \lim_{\theta \rightarrow 0+} \left(\frac{\sin\theta}{\theta} \right)^4 \\
&= \frac{1}{2(1+1)^2} \times 1^4 \\
&= \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

정답 ①

15. 출제의도 : 접선의 방정식을 이용하여 주어진 도형의 넓이가 최대가 되는 t 의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$y' = -2e^{-x} \text{이므로}$$

점 P에서의 접선의 방정식은

$$y - 2e^{-t} = -2e^{-t}(x - t)$$

$x=0$ 을 대입하면

$$y = 2(1+t)e^{-t}$$

$$\text{즉 } B(0, 2(1+t)e^{-t})$$

$$A(0, 2e^{-t}) \text{이므로}$$

$$\overline{AB} = 2te^{-t}$$

삼각형 APB의 넓이를 $S(t)$ 라 하면

$$S(t) = \frac{1}{2} \times 2te^{-t} \times t$$

$$= t^2 e^{-t}$$

$$S'(t) = 2te^{-t} - t^2 e^{-t}$$

$$= t(2-t)e^{-t}$$

$$S'(t)=0 \text{에서 } t=2$$

이때, $S(t)$ 는 $t=2$ 에서 극대이면서 최대

이므로

구하는 t 의 값은 2이다.

정답 ④

16. 출제의도 : 벡터의 내적을 이용하여

선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\overline{AB} = |\overrightarrow{AB}|$$

$$= |\overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA}|$$

$$= |\vec{b} - \vec{a}|$$

이때,

$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = (\vec{b} - \vec{a}) \cdot (\vec{b} - \vec{a})$$

$$= |\vec{b}|^2 - 2\vec{b} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$$

$$= 2 - 2 \times 1 + 2$$

$$= 2$$

이므로

$$\overline{AB}^2 = 2 \quad \dots\dots ①$$

$$\overline{BC} = |\overrightarrow{BC}|$$

$$= |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}|$$

$$= |\vec{c} - \vec{b}|$$

이때,

$$|\vec{c} - \vec{b}|^2 = (\vec{c} - \vec{b}) \cdot (\vec{c} - \vec{b})$$

$$= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{b} + |\vec{b}|^2$$

$$= 2 - 2 \times 0 + 2$$

$$= 4$$

이므로

$$\overline{BC}^2 = 4 \quad \dots\dots ②$$

$$\overline{AC} = |\overrightarrow{AC}|$$

$$= |\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OA}|$$

$$= |\vec{c} - \vec{a}|$$

이때,

$$|\vec{c} - \vec{a}|^2 = (\vec{c} - \vec{a}) \cdot (\vec{c} - \vec{a})$$

$$= |\vec{c}|^2 - 2\vec{c} \cdot \vec{a} + |\vec{a}|^2$$

$$= 2 - 2 \times (-\sqrt{2}) + 2$$

$$= 4 + 2\sqrt{2}$$

이므로

$$\overline{AC}^2 = 4 + 2\sqrt{2} \quad \dots\dots ③$$

따라서 ①, ②, ③에서

$$\overline{AB}^2 < \overline{BC}^2 < \overline{AC}^2 \text{이므로}$$

$$\overline{AB} < \overline{BC} < \overline{AC}$$

정답 ②

17. 출제의도 : 이산확률변수의 평균을 구하는 과정에서 빈칸을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

세 점 $(x+1, y)$, $(x, y+1)$, $(x+1, y+1)$ 로 이동하는 것을 각각 A, B, C로 나타내면

점 $(0, 0)$ 에서 점 $(4, 3)$ 까지 이동하는 횟수가 최소인 경우는

A, C, C, C를 일렬로 나열하는 경우이므로

$$k = \boxed{4}$$

이동하는 횟수가 6인 경우는

C, A, A, A, B, B를 일렬로 나열하는 경우이므로

$$\frac{6!}{3! \times 2!} = 60$$

$$\text{에서 } P(X=6) = \frac{1}{N} \times \boxed{60}$$

이때, 확률의 총합이 1이므로

$$\frac{4+30+60+35}{N} = 1$$

$$\text{에서 } N = \boxed{129}$$

따라서

$$a+b+c = 4+60+129 = 193$$

정답 ②

18. 출제의도 : 정규분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

조건 (가)에서

$$f(10) > f(20) \text{이므로}$$

$m < 15$ 이어야 한다.

조건 (나)에서

$$f(4) < f(22) \text{이므로}$$

$m > 13$ 이어야 한다.

$$\text{즉, } 13 < m < 15$$

이때, m 이 자연수 이므로

$$m = 14$$

따라서

$$P(17 \leq X \leq 18)$$

$$= P\left(\frac{17-14}{5} \leq Z \leq \frac{18-14}{5}\right)$$

$$= P(0.6 \leq Z \leq 0.8)$$

$$= P(0 \leq Z \leq 0.8) - P(0 \leq Z \leq 0.6)$$

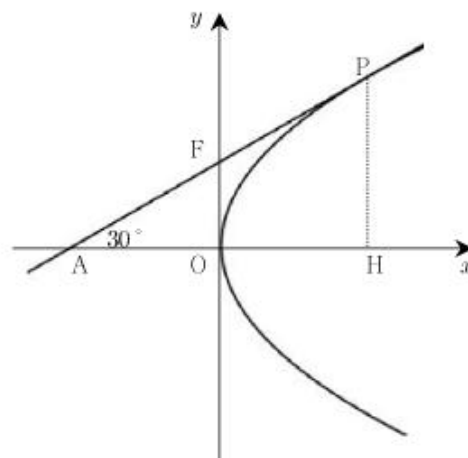
$$= 0.288 - 0.226$$

$$= 0.062$$

정답 ③

19. 출제의도 : 포물선의 접선을 이용하여 미지수의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점 (x_1, y_1) 에서의 접선이 x 축과 만나는 점의 좌표가 $(-x_1, 0)$ 이므로

점 P에서 x축에 내린 수선의 발을 H라 하면

$H(k, 0)$ 이다.

$\angle PAH = 30^\circ$ 이므로

$$\overline{FO} = \frac{k}{\sqrt{3}}, \quad \overline{PH} = \frac{2k}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{AF} = \overline{FP} = \frac{2k}{\sqrt{3}}$$

$$\overline{PF}' = \sqrt{k^2 + \left(\frac{3k}{\sqrt{3}}\right)^2} = 2k \text{이므로}$$

타원의 장축의 길이는

$$\overline{PF} + \overline{PF}' = \frac{2k}{\sqrt{3}} + 2k$$

$$\frac{2k}{\sqrt{3}} + 2k = 4\sqrt{3} + 12 \text{에서}$$

$$k = 6$$

또, 점 $(6, 4\sqrt{3})$ 이 포물선 $y^2 = 4px$ 위의 점이므로

$$(4\sqrt{3})^2 = 4p \times 6$$

$$48 = 24p \text{에서}$$

$$p = 2$$

따라서

$$k + p = 6 + 2 = 8$$

정답 ①

20. 출제의도 : 정적분으로 정의된 함수에 대하여 평균값의 정리와 사잇값의 정리를 활용하여 주어진 명제의 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $0 < x < \sqrt{\pi}$ 에서

$$e^{-x} > 0, \quad \sin(x^2) \geq 0 \text{이고,}$$

$$\sin 0 = 0, \quad \sin \pi = 0 \text{이므로}$$

$$f(\sqrt{\pi}) = e^{-\pi} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) dt > 0 \text{ (참)}$$

ㄴ.

$$f'(x) = -e^{-x} \int_0^x \sin(t^2) dt + e^{-x} \sin(x^2)$$

$$f'(0) = -e^{-0} \int_0^0 \sin(t^2) dt + e^{-0} \sin(0^2) = 0$$

$$f'(\sqrt{\pi})$$

$$= -e^{-\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\pi}} \sin(t^2) dt + e^{-\sqrt{\pi}} \sin(\sqrt{\pi}^2)$$

$$= -f(\sqrt{\pi}) < 0$$

함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[0, \sqrt{\pi}]$ 에서 연속이고, 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에서 미분가능하므로 평균값의 정리에 의하여

$$f(a) = \frac{f(\sqrt{\pi}) - f(0)}{\sqrt{\pi} - 0} > 0$$

를 만족시키는 a 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에서 적어도 하나 존재한다.

(참)

ㄷ. ㄴ을 만족시키는 a ($0 < a < \pi$)에 대하여 함수 $f(x)$ 가 닫힌 구간 $[a, \sqrt{\pi}]$ 에서 연속이고, $f'(a) > 0$, $f'(\sqrt{\pi}) < 0$ 이므로 사잇값의 정리에 의하여

$$f'(b) = 0$$

을 만족시키는 b 가 열린 구간 $(0, \sqrt{\pi})$ 에서 적어도 하나 존재한다. (참)

이상에서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

정답 ⑤

21. 출제의도 : 함수의 그래프의 개형과 치환적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

함수 $y = f(x)$ 의 그래프가 닫힌 구간 $[0, 1]$ 에서 x축과 만나는 점의 x좌표를 k 라 하자.

곡선 $y=f(x)$ 와 x 축, y 축으로 둘러싸인
부분의 넓이를 S_1 , 곡선 $y=f(x)$ 와 x 축
및 직선 $x=1$ 로 둘러싸인 부분의 넓이
를 S_2 라 하면

$$\int_0^1 f(x) dx = 2 \text{에서}$$

$$-S_1 + S_2 = 2 \quad \cdots \cdots \ominus$$

$$\int_0^1 |f(x)| dx = 2\sqrt{2} \text{에서}$$

$$S_1 + S_2 = 2\sqrt{2} \quad \cdots \cdots \oplus$$

$\ominus, \oplus$ 에서

$$S_1 = \sqrt{2} - 1, S_2 = \sqrt{2} + 1$$

(i) $0 \leq x \leq k$ 인 경우

$$F(x) = \int_0^x (-f(t)) dt \text{이므로}$$

$$F'(x) = -f(x)$$

$$\int_0^k f(x)F(x) dx \text{에서}$$

$$F(x) = s \text{로 놓으면}$$

$$x=0 \text{일 때 } s=0,$$

$$x=k \text{일 때 } s = \sqrt{2} - 1 \text{이고,}$$

$$F'(x) \frac{dx}{ds} = 1 \text{이므로}$$

$$\int_0^k f(x)F(x) dx$$

$$= \int_0^{\sqrt{2}-1} (-s) ds$$

$$= \left[-\frac{1}{2}s^2 \right]_0^{\sqrt{2}-1}$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(ii) $k \leq x \leq 1$ 인 경우

$$F(x) = (\sqrt{2}-1) + \int_k^x f(t) dt \text{이므로}$$

$$F'(x) = f(x)$$

$$\int_k^1 f(x)F(x) dx \text{에서}$$

$$F(x) = s \text{로 놓으면}$$

$$x=k \text{일 때 } s = \sqrt{2} - 1,$$

$$x=1 \text{일 때 } s = 2\sqrt{2} \text{이고,}$$

$$F'(x) \frac{dx}{ds} = 1 \text{이므로}$$

$$\int_k^1 f(x)F(x) dx$$

$$= \int_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}} s ds$$

$$= \left[\frac{1}{2}s^2 \right]_{\sqrt{2}-1}^{2\sqrt{2}}$$

$$= 4 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

(i), (ii)에서

$$\int_0^1 f(x)F(x) dx$$

$$= \int_0^k f(x)F(x) dx + \int_k^1 f(x)F(x) dx$$

$$= -\frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2 + 4 - \frac{1}{2}(\sqrt{2}-1)^2$$

$$= 4 - (\sqrt{2}-1)^2$$

$$= 4 - (3 - 2\sqrt{2})$$

$$= 1 + 2\sqrt{2}$$

정답 ④

22. 출제의도 : 중복조합의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$${}_4H_2 = {}_{4+2-1}C_2 = {}_5C_2 = 10$$

정답 10

23. 출제의도 : 지수부등식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{x-5} \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$x-5 \leq -2$$

$$\text{에서 } x \leq 3$$

따라서 모든 자연수 x 의 값은 1, 2, 3이고, 그 합은
 $1+2+3=6$
이다.

정답 6

24. 출제의도 : 구의 중심에서 평면에 이르는 거리를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\text{구 } x^2+y^2+z^2+2y-3=0 \text{에서}$$

$$x^2+(y+1)^2+z^2=4$$

이므로 이 구의 중심은 $(0, -1, 0)$ 이고
반지름의 길이는 2이다.

$$\text{평면 } x+8y-4z+k=0 \text{이}$$

구 $x^2+(y+1)^2+z^2=4$ 에 접하므로 구의
중심에서 평면 $x+8y-4z+k=0$ 에 이르는
거리는 구의 반지름의 길이와 같다.

이때, 구의 중심 $(0, -1, 0)$ 에서

평면 $x+8y-4z+k=0$ 에 이르는 거리는

$$\frac{|-8+k|}{\sqrt{1^2+8^2+(-4)^2}} = \frac{|-8+k|}{9}$$

이므로

$$\frac{|-8+k|}{9} = 2 \text{ 에서}$$

$$|-8+k|=18$$

$$-8+k=-18 \text{ 또는 } -8+k=18$$

$$k=-10 \text{ 또는 } k=26$$

따라서 모든 실수 k 의 값의 합은
 $-10+26=16$

정답 16

25. 출제의도 : 주어진 범위에서 삼각방정식의 근을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\cos^2 x - \sin x = 1$$

$$(1 - \sin^2 x) - \sin x = 1$$

$$\sin^2 x + \sin x = 0$$

$$\sin x(\sin x + 1) = 0$$

$$\sin x = 0 \text{ 또는 } \sin x = -1$$

$$x = \pi \text{ 또는 } x = \frac{3}{2}\pi$$

따라서 모든 실근의 합이

$$\pi + \frac{3}{2}\pi = \frac{5}{2}\pi$$

$$\text{이므로 } p+q=2+5=7$$

정답 7

26. 출제의도 : 확률의 정의를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

갑이 주머니 A에서 두 장의 카드를 꺼내고, 을이 주머니 B에서 두 장의 카드를 꺼내는 경우의 수는

$${}_4C_2 \times {}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} \times \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 36$$

갑이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드에 적힌 수의 합이 같은 경우는 다음과 같다.

(i) 갑과 을이 꺼낸 두 장의 카드에 적힌 숫자가 모두 같을 때,

이때의 경우의 수는

$${}_4C_2 = \frac{4 \times 3}{2 \times 1} = 6$$

(ii) 값이 1과 4가 적힌 카드를 꺼내고
 을은 2와 3이 적힌 카드를 꺼내거나 값
 이 2와 3이 적힌 카드를 꺼내고 을은 1
 과 4가 적힌 카드를 꺼낼 때,
 이때의 경우의 수는

2

(i), (ii)에서 값이 가진 두 장의 카드에
 적힌 수의 합과 을이 가진 두 장의 카드
 에 적힌 수의 합이 같을 확률은

$$\frac{6+2}{36} = \frac{2}{9}$$

따라서 $p=9$, $q=2$ 이므로
 $p+q=9+2=11$

정답 11

27. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 주
 건을 만족시키는 순서쌍의 개수를 구할
 수 있는가?

정답풀이 :

방정식 $a+b+c=7$ 을 만족시키는 모든
 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는

$${}_3H_7 = {}_9C_7 = {}_9C_2 = 36$$

이때, 조건 (나)를 만족시키지 않는 순서
 쌍 (a, b) 는

$$(0, 0), (0, 1), (1, 0), (2, 0)$$

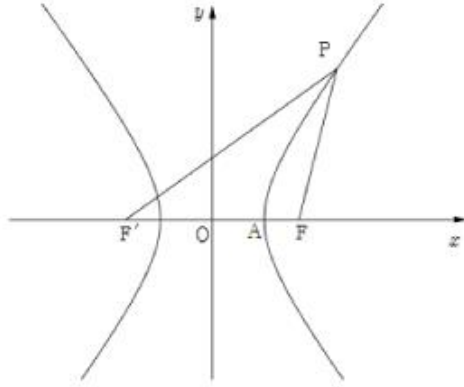
뿐이다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는
 $36-4=32$

정답 32

28. 출제의도 : 쌍곡선의 성질을 이용하
 여 쌍곡선의 주축의 길이를 구할 수 있
 는가?

정답풀이 :



쌍곡선의 방정식을

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \text{ (단, } a > 0, b > 0 \text{)}$$

로 놓으면 점근선의 방정식은

$$y = \pm \frac{b}{a}x \text{ 이므로}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{4}{3}, b = \frac{4}{3}a$$

조건 (가)에서

$$\overline{PF'} > \overline{PF}$$

이고, 점 P가 쌍곡선 위의 점이므로
 쌍곡선의 정의에 의하여

$$\overline{PF'} - \overline{PF} = 2a$$

이므로

$$\overline{PF} = \overline{PF'} - 2a = 30 - 2a$$

이때, $16 \leq \overline{PF} \leq 20$ 이므로

$$16 \leq 30 - 2a \leq 20$$

$$5 \leq a \leq 7 \quad \dots\dots \textcircled{1}$$

점 A의 좌표는 $(a, 0)$

쌍곡선의 정의에 의하여

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{a^2 + \frac{16}{9}a^2} = \frac{5}{3}a$$

이므로

$$\text{점 F의 좌표는 } \left(\frac{5}{3}a, 0\right)$$

$$\overline{AF} = \frac{5}{3}a - a = \frac{2}{3}a$$

조건 (나)에서

선분 AF의 길이가 자연수이므로

a 는 3의 배수이어야 한다.

이때 ①에서

$$a=6$$

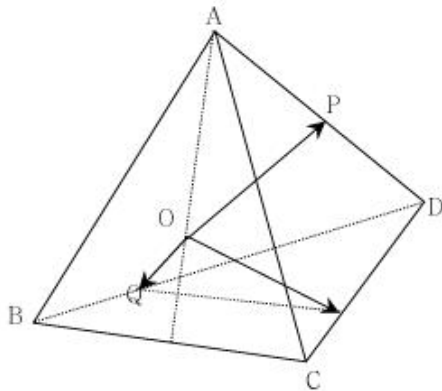
따라서 구하는 쌍곡선의 주축의 길이는

$$2a=12$$

정답 12

29. 출제의도 : 벡터의 수직과 내적을 이용하여 주어진 조건을 만족시키는 벡터의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



점 Q는 삼각형 BCD의 경계를 포함한 내부의 점이고, $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ} = 0$ 을 만족시키는 점이다.

그런데 $|\overrightarrow{PQ}|$ 가 최대하려면 점 Q는 선분 DB 또는 선분 DC 위에 있어야 한다.

선분 DB 위의 점을 Q라 하자.

$\overrightarrow{DA} = \vec{a}$, $\overrightarrow{DB} = \vec{b}$, $\overrightarrow{DC} = \vec{c}$ 라 하면

$$\overrightarrow{DP} = \frac{1}{2}\vec{a} \text{이고,}$$

$$\overrightarrow{DQ} = k\vec{b} \quad (0 < k < 1) \text{이다.}$$

$$\text{또, } |\vec{a}|^2 = |\vec{b}|^2 = |\vec{c}|^2 = 16 \text{이고,}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} = 8 \text{이다.}$$

$$\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$$

$$\begin{aligned} &= (\overrightarrow{DP} - \overrightarrow{DO}) \cdot (\overrightarrow{DQ} - \overrightarrow{DO}) \\ &= \left(\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right) \cdot \left(k\vec{b} - \frac{\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}}{3} \right) \\ &= \left(\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \right) \\ &\quad \cdot \left\{ -\frac{1}{3}\vec{a} + \left(k - \frac{1}{3} \right) \vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \right\} \end{aligned}$$

$$= -\frac{5}{6}k + \frac{2}{3}$$

$$-\frac{5}{6}k + \frac{2}{3} = 0 \text{에서 } k = \frac{4}{5}$$

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|$ 의 최댓값은

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{PQ}| &= |\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP}| \\ &= \left| \left(-\frac{1}{3}\vec{a} + \frac{7}{15}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \right) - \left(\frac{1}{6}\vec{a} - \frac{1}{3}\vec{b} - \frac{1}{3}\vec{c} \right) \right| \end{aligned}$$

$$= \left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} \right|$$

이때,

$$\begin{aligned} &\left| -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} \right|^2 \\ &= \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} \right) \cdot \left(-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{4}{5}\vec{b} \right) \\ &= \frac{1}{4}|\vec{a}|^2 - \frac{4}{5}\vec{a} \cdot \vec{b} + \frac{16}{25}|\vec{b}|^2 \\ &= \frac{1}{4} \times 16 - \frac{4}{5} \times 8 + \frac{16}{25} \times 16 \\ &= \frac{4 \times 49}{25} \\ &= \left(\frac{14}{5} \right)^2 \end{aligned}$$

이므로 구하는 최댓값은 $\frac{14}{5}$

$$\text{즉 } p+q=5+14=19$$

정답 19

30. 출제의도 : 미분법을 활용하여 극솟값의 최솟값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = \frac{g(x)}{x-a} (x > a) \text{에서}$$

$$f(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha-a} = M$$

$$f(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta-a} = M$$

$$f'(x) = \frac{g'(x)(x-a) - g(x)}{(x-a)^2} \text{에서}$$

$$f'(\alpha) = 0 \text{이므로}$$

$$g'(\alpha)(\alpha-a) - g(\alpha) = 0$$

$$g'(\alpha) = \frac{g(\alpha)}{\alpha-a}$$

$$f'(\beta) = 0 \text{이므로}$$

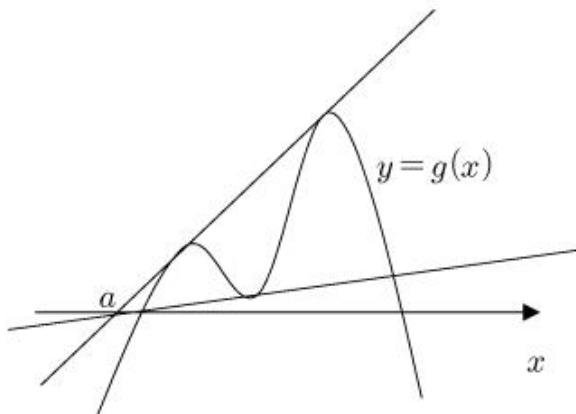
$$g'(\beta)(\beta-a) - g(\beta) = 0$$

$$g'(\beta) = \frac{g(\beta)}{\beta-a}$$

이때, $g'(\alpha)$ 는 $x=\alpha$ 에서 곡선 $y=g(x)$ 의 접선의 기울기이고,
 $g'(\beta)$ 는 $x=\beta$ 에서 곡선 $y=g(x)$ 의 접선의 기울기이다.

따라서 곡선 $y=g(x)$ 의 그래프는 다음 두 가지의 경우로 나누어 생각할 수 있다.

(i)

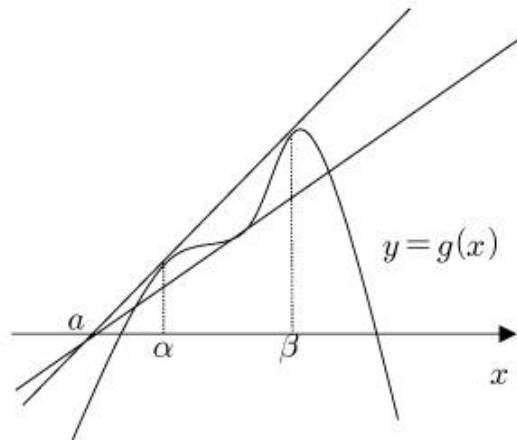


함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$ 가 극대 또는 극

소가 되는 x 의 값은 3개이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프도 극대 또는 극소가 되는 x 의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시키지 않는다.

(ii)



함수 $y=g(x)$ 의 그래프가 위의 그림과 같을 때, 함수 $y=g(x)$ 가 극대 또는 극소가 되는 x 의 값은 1개이다.

이때 함수 $y=f(x)$ 의 그래프는 극대 또는 극소가 되는 x 의 값은 3개이므로 조건 (다)를 만족시킨다.

(i), (ii)에서

함수 $y=g(x)$ 는 극값을 1개 갖는다.

$g(x) - kx = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2$ 으로 놓으면

$$g(x) = -(x-\alpha)^2(x-\beta)^2 + kx$$

이므로

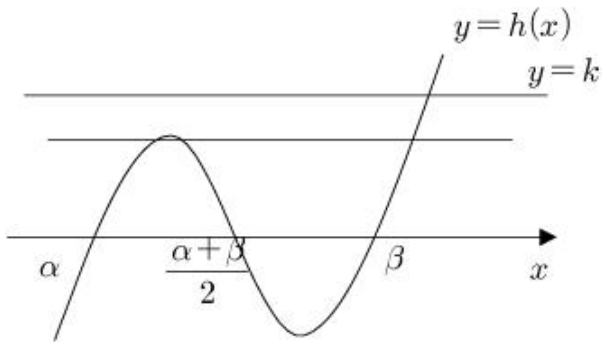
$$g'(x) = -4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) + k$$

이때, $g'(x) = 0$,

$$\text{즉 } 4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right) = k$$

의 서로 다른 실근의 개수는 1 또는 2이어야 한다.

이때, $h(x) = 4(x-\alpha)(x-\beta)\left(x - \frac{\alpha+\beta}{2}\right)$ 라 하면 곡선 $y=h(x)$ 와 직선 $y=k$ 는 한 점에서 만나거나 두 점에서 만나야 한다.



함수 $h(x)$ 의 극값은 $\beta = \alpha + 6\sqrt{3}$ 이므로
 $\frac{\alpha + \beta}{2} = 0$ 으로 놓은 후

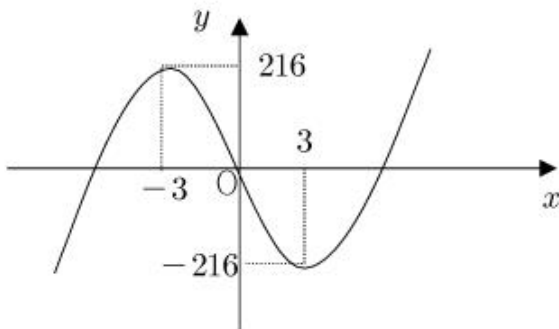
함수 $y = 4x(x + 3\sqrt{3})(x - 3\sqrt{3})$ 의 극값을
 구해도 된다.

이때, $y' = -12(x + 3)(x - 3)$ 이므로

$y' = 0$ 에서

$x = -3$ 또는 $x = 3$

함수 $y = 4x(x + 3\sqrt{3})(x - 3\sqrt{3})$ 의 그래
 프는 다음 그림과 같다.



따라서 k 의 범위는

$k \leq -216$ 또는 $k \geq 216$

이때, $k > 0$ 이므로 k 의 최솟값은 216다.

따라서 M 의 최솟값도 216이다.

정답 216