

2016학년도 대학수학능력시험
수학영역 B형 정답 및 풀이

01. ①	02. ③	03. ④	04. ⑤	05. ④
06. ②	07. ⑤	08. ①	09. ③	10. ②
11. ④	12. ②	13. ②	14. ③	15. ①
16. ③	17. ④	18. ①	19. ⑤	20. ⑤
21. ④	22. 3	23. 28	24. 80	25. 4
26. 104	27. 15	28. 30	29. 50	30. 35

1. 출제의도 : 행렬의 덧셈을 할 수 있는가?

정답풀이 :

$$A+B=\begin{pmatrix} a & 3 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix} a+4 & 4 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

이때, 행렬 $A+B$ 의 모든 성분의 합이 9이므로

$$a+8=9$$

$$\therefore a=1$$

정답 ①

2. 출제의도 : 함수의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{\sin 3x}$$

$$=\lim_{x \rightarrow 0} \left\{ \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \frac{3x}{\sin 3x} \times \frac{5}{3} \right\}$$

$$=\frac{5}{3} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+5x)}{5x} \times \lim_{x \rightarrow 0} \frac{3x}{\sin 3x}$$

$$=\frac{5}{3} \times 1 \times 1$$

$$=\frac{5}{3}$$

정답 ③

3. 출제의도 : 공간좌표를 이용하여 삼각형의 무게중심의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

세 점 $A(a, 0, 5)$, $B(1, b, -3)$, $C(1, 1, 1)$ 을 세 꼭짓점으로 하는 삼각형의 무게중심의 좌표는

$$\left(\frac{a+1+1}{3}, \frac{0+b+1}{3}, \frac{5+(-3)+1}{3} \right)$$

$$\therefore \left(\frac{a+2}{3}, \frac{b+1}{3}, 1 \right)$$

이때, 무게중심의 좌표가 $(2, 2, 1)$ 이므로

$$\frac{a+2}{3}=2, \quad \frac{b+1}{3}=2$$

$$\therefore a=4, \quad b=5$$

$$\therefore a+b=9$$

정답 ④

4. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\int_0^e \frac{5}{x+e} dx$$

$$= [5 \ln(x+e)]_0^e$$

$$= 5 \ln 2e - 5 \ln e$$

$$= 5 \ln 2$$

정답 ⑤

5. 출제의도 : 확률의 성질을 이용하여 조건부확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$P(A^c) = \frac{1}{4} \text{에서}$$

$$1 - P(A) = \frac{1}{4}$$

$$\therefore P(A) = \frac{3}{4}$$

또, 두 사건 A, B 가 서로 독립이므로

$$P(A \cap B) = \frac{1}{2} \text{에서}$$

$$P(A)P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\frac{3}{4}P(B) = \frac{1}{2}$$

$$\therefore P(B) = \frac{2}{3}$$

그리고, 두 사건 A, B 가 서로 독립이면

두 사건 A^c, B 도 서로 독립이므로

$$P(B|A^c) = P(B) = \frac{2}{3}$$

정답 ④

6. 출제의도 : 일차변환에 의하여 한 점이 이동한 점의 좌표를 구하고 직선의 기울기를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \end{pmatrix} \text{이므로 주어진 일차변}$$

환에 의하여 점 $P(2, -1)$ 이 옮겨진 점 Q 의 좌표는 $(0, -5)$ 이다.

따라서 직선 PQ 의 기울기는

$$\frac{-5+1}{0-2} = 2$$

이다.

정답 ②

7. 출제의도 : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

곡선 $y = 3e^{x-1}$ 위의 점 A 의 좌표를

$(a, 3e^{a-1})$ 으로 놓으면 $y' = 3e^{x-1}$ 이므로

접선의 기울기는 $3e^{a-1}$ 이다.

그러므로 접선의 방정식은

$$y = 3e^{a-1}(x-a) + 3e^{a-1}$$

이 접선이 원점 $O(0, 0)$ 을 지나므로

$$0 = 3e^{a-1}(-a) + 3e^{a-1}$$

$$\therefore a = 1$$

따라서, $A(1, 3)$ 이므로

$$OA = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$$

정답 ⑤

8. 출제의도 : 독립시행의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

한 개의 동전을 5번 던질 때, 앞면이 나오는 횟수를 a , 뒷면이 나오는 횟수를 b 라고 하자.

이때 $a \cdot b = 6$ 인 경우와 확률은 다음과 같다.

(i) $a = 2, b = 3$ 일 때,

$${}_5C_2 \left(\frac{1}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{16}$$

(ii) $a = 3, b = 2$ 일 때,

$${}_5C_3 \left(\frac{1}{2}\right)^3 \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

그러므로 구하는 확률은

$$\frac{5}{16} + \frac{5}{16} = \frac{5}{8}$$

정답 ①

9. 출제의도 : 포물선의 접선의 방정식을 구하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

포물선 $y^2 = 4x$ 위의 점 $A(4, 4)$ 에서의 접선의 방정식은

$$4y = 2(x+4)$$

$$y = \frac{1}{2}x + 2 \quad \text{--- ㉠}$$

이때, 포물선의 준선의 방정식은 $x = -1$ 이므로

$$D(-1, 0)$$

또, ㉠에 $x = -1$ 을 대입하면

$$B\left(-1, \frac{3}{2}\right)$$

또, ㉠에 $y = 0$ 을 대입하면

$$C(-4, 0)$$

따라서, 삼각형 BCD의 넓이를 S 라 하면

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \times \overline{CD} \times \overline{BD} \\ &= \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{3}{2} \\ &= \frac{9}{4} \end{aligned}$$

정답 ④

10. 출제의도 : 실생활 문제에 지수방정식을 활용할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\frac{W}{W_0} = \frac{1}{2} \times 10^{at}(1 + 10^{at})$$

$$3 = \frac{1}{2} \times 10^{15a}(1 + 10^{15a}) \text{에서}$$

$$(10^{15a})^2 + 10^{15a} - 6 = 0$$

$$(10^{15a} + 3)(10^{15a} - 2) = 0$$

$$10^{15a} > 0 \text{이므로 } 10^{15a} = 2$$

$$\therefore k = \frac{1}{2} \times 10^{30a}(1 + 10^{30a})$$

$$= \frac{1}{2} \times 4 \times (1 + 4) = 10$$

정답 ②

11. 출제의도 : 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

달린 구간 $[0, 1]$ 에서 함수 $f(x)$ 의 그래프와 x 축 및 직선 $x = 1$ 로 둘러싸인 부분을 x 축의 둘레로 회전시켜 생기는 회전체의 부피를 V 라 하면

$$\begin{aligned} V &= \pi \int_0^1 \{f(x)\}^2 dx \\ &= \pi \int_0^1 25x^2(x-2)^2 dx \\ &= 25\pi \int_0^1 (x^4 - 4x^3 + 4x^2) dx \\ &= 25\pi \left[\frac{x^5}{5} - x^4 + \frac{4}{3}x^3 \right]_0^1 \\ &= \frac{40}{3}\pi \end{aligned}$$

정답 ④

12. 출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 무리방정식을 풀 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{4-f(x)} = 1-x$ 의 양변을 각각 제곱하면

$$4 - f(x) = (1-x)^2$$

$$\therefore f(x) = 4 - (1-x)^2 \quad (\text{단, } x \leq 1)$$

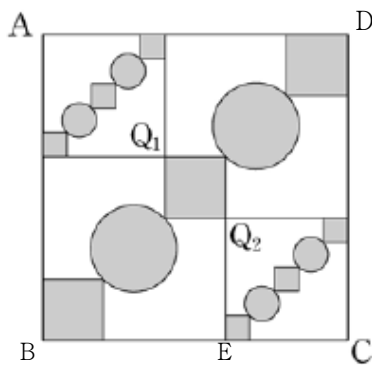
이때 함수 $f(x)$ 의 그래프와 곡선 $y = -(x-1)^2 + 4$ 가 $x \leq 1$ 의 범위에서 만

나는 서로 다른 점의 개수는 2이므로 구하는 서로 다른 실근의 개수는 2이다.

정답 ②

13. 출제의도 : 무한등비급수를 이용하여 반복되는 도형에서 넓이의 합에 대한 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$\overline{BE} : \overline{EC} = 3 : 2$ 이므로 닮음비는 $\frac{2}{5}$ 이

다. 따라서 넓이의 비는 $(\frac{2}{5})^2 = \frac{4}{25}$ 이고 도형의 개수는 2배씩 늘어나므로 무한등비급수의 공비는

$$\frac{4}{25} \times 2 = \frac{8}{25}$$

또한, 그림 R_1 에서 $\overline{BD} = 5\sqrt{2}$ 이므로

$$S_1 = 3 \times 1 + 2 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \right)^2 \pi$$

$$= 3 + \pi$$

$$\begin{aligned} \therefore \lim_{n \rightarrow \infty} S_n &= \frac{3 + \pi}{1 - \frac{8}{25}} \\ &= \frac{25}{17} (\pi + 3) \end{aligned}$$

정답 ②

14. 출제의도 : 중복조합을 이용하여 순서쌍의 개수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

주어진 조건을 만족시키는 세 자연수 $|a|, |b|, |c|$ 의 순서쌍 $(|a|, |b|, |c|)$ 의 개수는 5 이하의 자연수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 중복조합의 수와 같다.

이때 a, b, c 는 각각 음의 정수와 양의 정수의 값을 가질 수 있으므로 순서쌍 (a, b, c) 의 개수는 $(|a|, |b|, |c|)$ 의 개수의 2^3 배와 같다.

따라서 구하는 순서쌍의 개수는

$$\begin{aligned} & {}_5H_3 \times 2^3 \\ &= {}_{5+3-1}C_3 \times 8 \\ &= {}_7C_3 \times 8 \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{3 \times 2 \times 1} \times 8 \\ &= 280 \end{aligned}$$

정답 ③

15. 출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

사각형 OACB가 평행사변형이므로

$$\begin{aligned} f(\theta) &= 2 \times \triangle OAB \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times \overline{OA} \times \overline{OB} \times \sin \theta \\ &= 2 \times \frac{1}{2} \times 1 \times \sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta} \times \sin \theta \\ &= \sin \theta \end{aligned}$$

또, 평행사변형 OACB의 대각선의 중점은 일치하므로 C의 좌표를 (a, b) 라 하면

$$\left(\frac{\cos \theta + 1}{2}, \frac{\sin \theta}{2} \right) = \left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2} \right)$$

$$\therefore a = \cos \theta + 1, b = \sin \theta$$

$$\therefore C(\cos \theta + 1, \sin \theta)$$

그러므로

$$\begin{aligned} g(\theta) &= \overline{OC}^2 \\ &= (\cos \theta + 1)^2 + \sin^2 \theta \\ &= 2 + 2 \cos \theta \end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned} f(\theta) + g(\theta) &= \sin \theta + (2 + 2 \cos \theta) \\ &= 2 \cos \theta + \sin \theta + 2 \end{aligned}$$

$$= \sqrt{5} \left(\frac{2\sqrt{5}}{5} \cos \theta + \frac{\sqrt{5}}{5} \sin \theta \right) + 2$$

$$= \sqrt{5} \sin(\theta + \alpha) + 2$$

$$(\text{단, } \cos \alpha = \frac{\sqrt{5}}{5}, \sin \alpha = \frac{2\sqrt{5}}{5},$$

$$0 < \alpha < \frac{\pi}{2})$$

따라서, $f(\theta) + g(\theta)$ 의 최댓값은

$$\theta + \alpha = \frac{\pi}{2} \text{ 즉, } \theta = \frac{\pi}{2} - \alpha \text{ 일 때,}$$

$$\sqrt{5} + 2 \text{을 갖는다.}$$

정답 ①

16. 출제의도 : 행렬의 성질을 추론할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\neg. A+B = BABA \text{이고,}$$

$$ABA = B+E \text{에서 } BABA = B^2+B$$

$$\text{이므로 } A+B = B^2+B$$

$$\text{에서 } A = B^2 \text{ (참)}$$

$$\angle. ABA = B+E \text{에서 } B^2BB^2 = B+E$$

$$\text{이므로 } (B^4-E)B = E$$

$$(A^2-E)B = E$$

$$\therefore B^{-1} = A^2 - E \text{ (거짓)}$$

$$\sqsubset. \neg \text{에서 } A = B^2 \text{이므로}$$

$$A+B = (BA)^2 \text{에서 } A+B = B^6 \text{이고,}$$

$$A+B = (B^2)^3 = A^3$$

$$ABA = B+E \text{에서 } B^5 = B+E$$

또한, $A^3 = A+B$ 의 양변에 A^2 을 곱하면

$$A^5 = A^3 + A^2B$$

$$= A+B+A^2B$$

$$= A+B+B^5$$

이므로 $A^5 - B^5 = A+B$ (참)

이상에서 옳은 것은 $\neg$, $\sqsubset$ 이다.

정답 ③

17. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$$b_1 = 2 \text{ 이고 } b_n = b_{n-1} + 2n \text{ (} n \geq 2 \text{)} \text{이다.}$$

수열 $\{b_n\}$ 의 일반항을 구해보면

$$b_n - b_{n-1} = 2n$$

에서

$$b_2 - b_1 = 2 \times 2$$

$$b_3 - b_2 = 2 \times 3$$

...

$$b_n - b_{n-1} = 2n$$

이므로 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 더하면

$$b_n - b_1 = 2(2+3+\dots+n)$$

$$\therefore b_n = b_1 + 2(2+3+\dots+n)$$

$$= 2 + 2(2+3+\dots+n)$$

$$= 2(1+2+3+\dots+n)$$

$$= 2 \times \frac{n(n+1)}{2} = \boxed{n}(n+1)$$

$$\text{따라서, } b_n = \frac{S_{n+1}}{S_n} \text{ 이므로}$$

$$\frac{S_{n+1}}{S_n} = n(n+1)$$

에서

$$\frac{S_2}{S_1} = 1 \times 2$$

$$\frac{S_3}{S_2} = 2 \times 3$$

...

$$\frac{S_n}{S_{n-1}} = (n-1)n$$

이고 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 모두 곱하면

$$\frac{S_n}{S_1} = 1 \times 2^2 \times 3^2 \times \dots \times (n-1)^2 \times n$$

$$\therefore S_n = \boxed{n} \times \{(n-1)!\}^2$$

따라서, $a_1 = 1$ 이고 $n \geq 2$ 일 때

$$\begin{aligned} a_n &= S_n - S_{n-1} \\ &= n \times \{(n-1)!\}^2 - (n-1) \times \{(n-2)!\}^2 \\ &= \{n(n-1)^2 - (n-1)\} \times \{(n-2)!\}^2 \\ &= \boxed{(n-1)(n^2 - n - 1)} \times \{(n-2)!\}^2 \end{aligned}$$

$$\therefore f(n) = n, \quad g(n) = (n-1)(n^2 - n - 1)$$

$$\begin{aligned} \therefore f(10) + g(6) &= 10 + 5 \times 29 \\ &= 10 + 145 = 155 \end{aligned}$$

정답 ④

18. 출제의도 : 표본평균의 분포를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

정규분포 $N(50, 8^2)$ 을 따르는 모집단에서 임의추출한 표본의 크기가 16인 표본평균 $\bar{X}$ 는 정규분포 $N\left(50, \left(\frac{8}{\sqrt{16}}\right)^2\right)$

즉, $N(50, 2^2)$ 을 따른다.

또, 정규분포 $N(75, \sigma^2)$ 을 따르는 모집

단에서 임의추출한 표본의 크기가 25인 표본평균 $\bar{Y}$ 는 정규분포

$N\left(75, \left(\frac{\sigma}{\sqrt{25}}\right)^2\right)$ 즉, $N\left(75, \left(\frac{\sigma}{5}\right)^2\right)$ 을 따른다.

이때

$$\begin{aligned} P(\bar{X} \leq 53) &= P\left(\frac{\bar{X} - 50}{2} \leq \frac{53 - 50}{2}\right) \\ &= P(Z \leq 1.5) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1.5) \end{aligned}$$

이고

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} \leq 69) &= P\left(\frac{\bar{Y} - 75}{\frac{\sigma}{5}} \leq \frac{69 - 75}{\frac{\sigma}{5}}\right) \\ &= P\left(Z \leq -\frac{30}{\sigma}\right) \\ &= 0.5 - P\left(0 \leq Z \leq \frac{30}{\sigma}\right) \end{aligned}$$

이다.

이때 $P(\bar{X} \leq 53) + P(\bar{Y} \leq 69) = 1$ 이므로

$$P(0 \leq Z \leq 1.5) = P\left(0 \leq Z \leq \frac{30}{\sigma}\right)$$

즉, $1.5 = \frac{30}{\sigma}$ 이어야 한다.

$$\therefore \sigma = 20$$

$$\begin{aligned} P(\bar{Y} \geq 71) &= P\left(\frac{\bar{Y} - 75}{4} \geq \frac{71 - 75}{4}\right) \\ &= P(Z \geq -1) \\ &= 0.5 + P(0 \leq Z \leq 1) \\ &= 0.5 + 0.3413 \\ &= 0.8413 \end{aligned}$$

정답 ①

19. 출제의도 :

점과 평면 사이의 거리를 활용할 수 있고
정사영의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

점 $A(2, 2, 1)$ 과 평면 α :

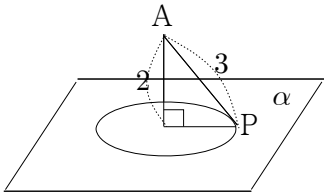
$x + 2y + 2z - 14 = 0$ 사이의 거리를 d 라
하면

$$d = \frac{|2 + 2 \cdot 2 + 2 \cdot 1 - 14|}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} = 2$$

그러므로 $\overline{AP} \leq 3$ 인 점 P 가 나타내는
도형은 그림에서 반지름의 길이가

$$\sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{5}$$

인 원의 경계 및 내부이다.



한편, xy 평면의 법선벡터는 $(0, 0, 1)$ 이고
평면 α 의 법선벡터는 $(1, 2, 2)$ 이므로
 xy 평면과 평면 α 가 이루는 예각의
크기를 θ 라 하면

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{|0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 + 1 \cdot 2|}{\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2} \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2}} \\ &= \frac{2}{3} \end{aligned}$$

따라서, 구하는 정사영의 넓이는

$$\begin{aligned} &(\sqrt{5})^2 \pi \times \cos \theta \\ &= 5\pi \times \frac{2}{3} \\ &= \frac{10}{3} \pi \end{aligned}$$

정답 ⑤

20. 출제의도 : 상용로그의 지표를 이해
할 수 있는가?

정답풀이 :

$1 \leq n \leq 100$ 이므로 $0 \leq f(n) \leq 2$ 이
다.

(i) $f(n) = 0$ 즉 $1 \leq n \leq 9$ 일 때

$f(n+10) = 1$ 이어야 하므로

$$10 \leq n+10 < 100$$

$$\therefore 1 \leq n \leq 9$$

(ii) $f(n) = 1$ 즉 $10 \leq n \leq 99$ 일 때

$f(n+10) = 2$ 이어야 하므로

$$100 \leq n+10 < 1000$$

$$\therefore 90 \leq n \leq 99$$

(iii) $f(n) = 2$ 즉 $n = 100$ 일 때

$f(n+10) = f(110) = 2$ 이므로

$f(n+10) = 3$ 을 만족하지 않는다.

(i), (ii), (iii)에서 구하는 자연수 n 의 개
수는

$$9 + 10 = 19$$

정답 ⑤

21. 출제의도 : 역함수의 미분법을 활용
할 수 있는가?

정답풀이 :

$h(t) = t \times \{f(t) - g(t)\}$ 이므로

$$h'(t) = \{f(t) - g(t)\} + t \times \{f'(t) - g'(t)\}$$

그러므로

$$h'(5) = \{f(5) - g(5)\} + 5\{f'(5) - g'(5)\}$$

-----㉞

한편, $y = x^3 + 2x^2 - 15x + 5$ 와 직선 $y = 5$
가 만나는 점의 x 좌표는

$$x^3 + 2x^2 - 15x + 5 = 5$$

$$x(x^2 + 2x - 15) = 0$$

$$x(x+5)(x-3) = 0$$

$$\therefore x = -5 \text{ 또는 } x = 0 \text{ 또는 } x = 3$$

그러므로

$$f(5) = 3, g(5) = -5 \quad \text{----㉟}$$

한편, $y' = 3x^2 + 4x - 15$ 에서

$$f'(5) = \frac{1}{3 \cdot 3^2 + 4 \cdot 3 - 15} = \frac{1}{24}$$

$$g'(5) = \frac{1}{3 \cdot (-5)^2 + 4 \cdot (-5) - 15} = \frac{1}{40}$$

-----㉔

㉔과 ㉔을 ㉔에 대입하면

$$\begin{aligned} h'(5) &= \{3 - (-5)\} + 5 \left(\frac{1}{24} - \frac{1}{40} \right) \\ &= 8 + \frac{1}{12} \\ &= \frac{97}{12} \end{aligned}$$

정답 ④

22. 출제의도 : 등차수열의 공차를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

공차를 d 라 하면

$$a_2 = 2 + d, \quad a_3 = 2 + 2d, \quad a_9 = 2 + 8d$$

이므로

$$2(2 + d + 2 + 2d) = 2 + 8d$$

$$8 + 6d = 2 + 8d$$

$$\therefore d = 3$$

정답 3

23. 출제의도 : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$f(x) = 4 \sin 7x \text{ 이므로}$$

$$f'(x) = 28 \cos 7x$$

따라서,

$$\begin{aligned} f'(2\pi) &= 28 \cos(14\pi) \\ &= 28 \end{aligned}$$

정답 28

24. 출제의도 : 확률밀도함수의 성질을 이해할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\begin{aligned} \int_0^1 f(x) dx &= k \int_0^1 (x - x^4) dx \\ &= k \left[\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{5} x^5 \right]_0^1 \\ &= k \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5} \right) \\ &= \frac{3}{10} k \\ &= 1 \end{aligned}$$

에서

$$k = \frac{10}{3}$$

$$\therefore 24k = 24 \times \frac{10}{3} = 80$$

정답 80

25. 출제의도 : 등비수열의 극한을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

첫째항이 1, 공비가 r 인 등비수열 $\{a_n\}$ 의 일반항 a_n 은

$$a_n = r^{n-1}$$

또,

$$S_n = \frac{r^n - 1}{r - 1}$$

그러므로

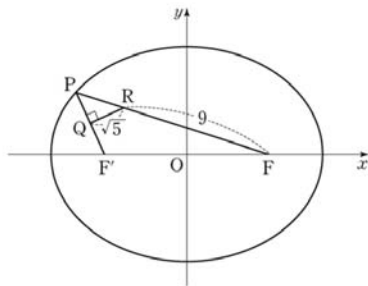
$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{S_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^{n-1}}{\frac{r^n - 1}{r - 1}} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n - r^{n-1}}{r^n - 1} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r-1}{r - \left(\frac{1}{r}\right)^{n-1}} \\
&= \frac{r-1}{r} \\
&= 1 - \frac{1}{r} = \frac{3}{4} \\
\therefore \frac{1}{r} &= \frac{1}{4} \\
\therefore r &= 4
\end{aligned}$$

정답 4

26. 출제의도 : 코사인법칙과 타원의 정의를 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

정답풀이 :



직각삼각형 PQR에서

$$\overline{PR} = \frac{1}{3} \overline{PF} = 3$$

이므로 $\overline{PQ} = \overline{QF'} = k$ 라 하면

$$k^2 + 5 = 9$$

$$\therefore k = 2 (\because k > 0)$$

이때

$$\overline{PF'} = 2 \times 2 = 4$$

$$\overline{PF} = 3 + 9 = 12$$

이고

$$\overline{PF} + \overline{PF'} = 12 + 4 = 16$$

이므로 주어진 타원의 장축의 길이는

16이다.

따라서 $2a = 16$ 이므로

$$a = 8$$

직각삼각형 PQR에서 $\angle QPR = \theta$ 라 하면

$$\cos \theta = \frac{2}{3}$$

따라서 삼각형 FPF'에서 코사인 정리에 의해

$$\begin{aligned}
\overline{FF'}^2 &= 12^2 + 4^2 - 2 \times 12 \times 4 \times \cos \theta \\
&= 160 - 96 \times \frac{2}{3} \\
&= 160 - 64 = 96
\end{aligned}$$

$$\therefore \overline{FF'} = \sqrt{96} = 4\sqrt{6}$$

따라서 $c = \frac{1}{2} \overline{FF'} = 2\sqrt{6}$ 이므로

$$a^2 - b^2 = (2\sqrt{6})^2$$

$$b^2 = 64 - 24 = 40$$

$$\therefore a^2 + b^2 = 64 + 40 = 104$$

정답 104

27. 출제의도 : 삼수선의 정리를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

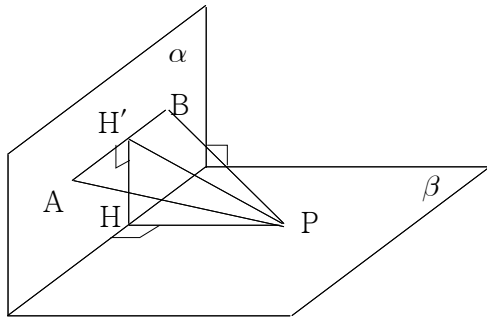
정답풀이 :

그림과 같이 점 P에서 평면 α 에 내린 수선의 발을 H, 점 H에서 직선 AB에 내린 수선의 발을 H'이라 하면

$$\overline{PH} \perp \alpha, \overline{HH'} \perp (\text{직선 AB})$$

그러므로 삼수선의 정리에 의해

$$\overline{PH'} \perp (\text{직선 AB})$$



한편, 점 A와 평면 β 사이의 거리가 2이고 직선 AB가 평면 β 와 평행하므로 $\overline{HH'} = 2$

또, 점 P와 평면 α 사이의 거리가 4이므로

$$\overline{PH} = 4$$

그러므로 직각삼각형 OHH'에서

$$\begin{aligned} \overline{PH'} &= \sqrt{\overline{PH}^2 + \overline{HH'}^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 2^2} \\ &= 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

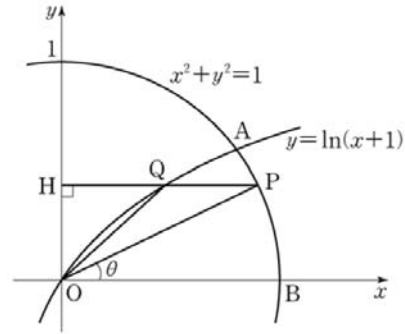
따라서, 삼각형 PAB의 넓이는

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2} \times \overline{AB} \times \overline{PH'} \\ &= \frac{1}{2} \times 3\sqrt{5} \times 2\sqrt{5} \\ &= 15 \end{aligned}$$

정답
15

28. 출제의도 : 삼각함수와 로그함수의 극한을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :



$P(\cos \theta, \sin \theta)$ 이므로 점 Q의 x 좌표는 $\sin \theta = \ln(x+1)$ 에서

$$x = e^{\sin \theta} - 1$$

따라서 $Q(e^{\sin \theta} - 1, \sin \theta)$ 이므로

$$S(\theta) = \frac{1}{2} \times (\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \times \sin \theta$$

한편 $H(0, \sin \theta)$ 이므로

$$L(\theta) = e^{\sin \theta} - 1$$

$$\therefore k = \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{S(\theta)}{L(\theta)}$$

$$= \frac{1}{2} \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{(\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \sin \theta}{e^{\sin \theta} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \times \lim_{\theta \rightarrow +0} (\cos \theta - e^{\sin \theta} + 1) \times \lim_{\theta \rightarrow +0} \frac{\sin \theta}{e^{\sin \theta} - 1}$$

$$= \frac{1}{2} \times (1 - 1 + 1) \times 1 = \frac{1}{2}$$

$$\therefore 60k = 60 \times \frac{1}{2} = 30$$

정답 30

29. 출제의도 : 벡터의 내적의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

벡터 $\overrightarrow{AP}$ 를 시점이 원점이 되도록 옮겼을 때, 종점을 P' 이라 하자.

이때,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} &= \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{AQ} \\ &= \overrightarrow{OP'} \cdot (\overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OA}) \\ &= \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA}\end{aligned}$$

이때, 점 Q 가 점 P' 이 되도록 잡으면 최댓값을 가지므로

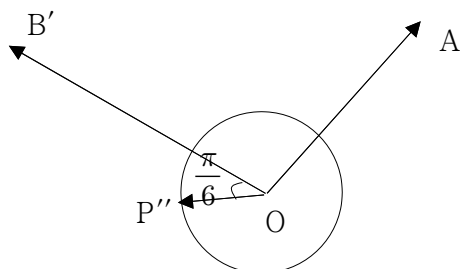
$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA} &\leq \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OP'} - \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= 1 - \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA} \quad \text{-----}\textcircled{A}\end{aligned}$$

한편,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} &= \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} \\ &= (1, -\sqrt{2}, 2\sqrt{3}) - (2, \sqrt{2}, \sqrt{3}) \\ &= (-1, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})\end{aligned}$$

이고 점 B' 을 $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB'}$ 이라 하자.

벡터 $\overrightarrow{AP}$ 와 벡터 $\overrightarrow{AB}$ 가 이루는 각의 크기가 $\frac{\pi}{6}$ 이므로 그림과 같이 점 P' 이 세 점 O, A, B' 에 의하여 결정된 평면 위에 그림과 같이 P'' 에 있을 때, $\overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA}$ 는 최솟값을 갖는다.



이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB'}$ 이 이루는 각의

크기를 α 라 하면

$$\begin{aligned}\cos \alpha &= \frac{(2, \sqrt{2}, \sqrt{3}) \cdot (-1, -2\sqrt{2}, \sqrt{3})}{\sqrt{4+2+3} \sqrt{1+8+3}} \\ &= \frac{(-2)+(-4)+3}{6\sqrt{3}} \\ &= -\frac{1}{2\sqrt{3}} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6}\end{aligned}$$

이때, 두 벡터 $\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OP''}$ 이 이루는 각의

크기는 $\alpha + \frac{\pi}{6}$ 이고

$$\begin{aligned}\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) &= \cos \alpha \cos \frac{\pi}{6} - \sin \alpha \sin \frac{\pi}{6} \\ &= -\frac{\sqrt{3}}{6} \times \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{\sqrt{33}}{6} \times \frac{1}{2} \\ &= -\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{12}\end{aligned}$$

그러므로

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP''} \cdot \overrightarrow{OA} &= |\overrightarrow{OP''}| |\overrightarrow{OA}| \cos\left(\alpha + \frac{\pi}{6}\right) \\ &= 1 \times \sqrt{4+2+3} \times \left(-\frac{1}{4} - \frac{\sqrt{33}}{12}\right) \\ &= -\frac{3}{4} - \frac{\sqrt{33}}{4}\end{aligned}$$

그러므로 $\textcircled{A}$ 에서

$$\begin{aligned}1 - \overrightarrow{OP'} \cdot \overrightarrow{OA} &\leq 1 - \overrightarrow{OP''} \cdot \overrightarrow{OA} \\ &= \frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}\end{aligned}$$

따라서, 최댓값은 $\frac{7}{4} + \frac{\sqrt{33}}{4}$ 이므로

$$a = \frac{7}{4}, \quad b = \frac{1}{4}$$

$$\therefore 16(a^2 + b^2) = 50$$

정답 50

30. 출제의도 :

정적분의 성질과 연속함수의 성질을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

(나)에 주어진 등식에 $x = 0$ 을 대입하면
 $f(0) = 0$ ㉠

(나)에 주어진 등식의 양변을 x 에 대하여 미분하면

$$f'(x) = \sqrt{4-2f(x)}$$

$$\therefore \{f'(x)\}^2 = 4 - 2f(x)$$

(단, $f'(x) \geq 0$, $f(x) \leq 2$) ㉡

$x \leq b$ 일 때

$f'(x) = 2a(x-b)$ 이므로 ㉡에서

$$4a^2(x-b)^2 = 4 - 2\{a(x-b)^2 + c\}$$

..... ㉢

㉢이 $x \leq b$ 인 모든 실수 x 에 대하여 성립하므로

$$4a^2 = -2a \text{ 이고 } 4 - 2c = 0 \text{ 이다.}$$

$$\therefore a = -\frac{1}{2}, c = 2$$

따라서 $x \leq b$ 일 때

$$f(x) = -\frac{1}{2}(x-b)^2 + 2$$

이때 $b < 0$ 이면 $f(b) = 2$ 이고 ㉠에서
 $f(0) = 0$ 이므로

모든 실수 x 에 대하여 $f'(x) \geq 0$ 이라는
㉡의 조건에 모순이다.

$$\therefore b \geq 0$$

㉢에서 $f(0) = 0$ 이므로

$$f(0) = -\frac{1}{2}b^2 + 2 = 0$$

$$\therefore b^2 = 4$$

$$\therefore b = 2 (\because b \geq 0)$$

이때 ㉡에서 $f'(x) \geq 0$ 이고 $f(x) \leq 2$ 이므로

$x > b$ 일 때 $f(x) = 2$ 이다.

따라서

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 & (x \leq 2) \\ 2 & (x > 2) \end{cases}$$

이므로

$$\int_0^6 f(x) dx = \int_0^2 f(x) dx + \int_2^6 f(x) dx$$

$$= \int_0^2 \left\{ -\frac{1}{2}(x-2)^2 + 2 \right\} dx + \int_2^6 2 dx$$

$$= \left[-\frac{1}{6}(x-2)^3 + 2x \right]_0^2 + [2x]_2^6$$

$$= \left(4 - \frac{8}{6} \right) + (12 - 4)$$

$$= 12 - \frac{4}{3} = \frac{32}{3}$$

$$\therefore p + q = 3 + 32 = 35$$

정답 35