2015학년도 대학수학능력시험

수학영역 B형 정답 및 풀이

01. ⑤	02. ③	03. ①	04. ②	05. ④
06. ③	07. ①	08. ②	09. ②	10. ①
11. ⑤	12. ①	13. ③	14. ④	15. ④
16. ⑤	17. ③	18. ⑤	19. ②	20. ④
21. ①	22. 26	23. 8	24. 25	25. 20
26. 220	27. 12	28. 96	29. 9	30. 39

1. 출제의도 : 행렬의 덧셈을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$A+B=\begin{pmatrix}1&1\\0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1&1\\3&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2&2\\3&2\end{pmatrix}$

따라서 모든 성분의 합은

$2+2+3+2=9$

<답> ⑤

2. 출제의도 : 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\lim_{x\to0}\frac{\ln(1+x)}{3x}$

$=\frac{1}{3}\lim_{x\to0}\ln(1+x)^{\frac{1}{x}}$

$=\frac{1}{3}\ln e$

$=\frac{1}{3}$

<답> ③

3. 출제의도 : 삼각함수의 최댓값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f(x)$

$=\sin x+\sqrt{7}\cos x-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\sin x+\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}\cos x\right)-\sqrt{2}$

$=2\sqrt{2}\sin(x+\alpha)-\sqrt{2}$

(단, $\cos\alpha=\frac{1}{2\sqrt{2}}$, $\sin\alpha=\frac{\sqrt{7}}{2\sqrt{2}}$)

따라서, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sin(x+\alpha)=1$ 일 때

$2\sqrt{2}\times1-\sqrt{2}=\sqrt{2}$

<답> ①

4. 출제의도 : 정적분의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\int_0^1 3\sqrt{x}\,dx$

$=\left[2x^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=2$

<답> ②

5. 출제의도 : 내분점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB를 $2:1$로 내분하는 점의 좌표는

$\left(\frac{2\times5+1\times2}{2+1}, \frac{2\times(-3)+1\times a}{2+1}\right.$

$, \dfrac{2\times b+1\times(-2)}{2+1})$

즉, $(4, \dfrac{a-6}{3}, \dfrac{2b-2}{3})$이고 이 점이 x축 위에 있으므로

$\dfrac{a-6}{3}=0,\ \dfrac{2b-2}{3}=0$

따라서, $a=6,\ b=1$이므로

$a+b=7$

<답> ④

6. **출제의도** : 합성변환에 의하여 옮겨진 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
합성변환 $f\circ g$를 나타내는 행렬은

$\begin{pmatrix}2&1\\4&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2&0\\1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\10&-2\end{pmatrix}$

이므로

$\begin{pmatrix}a\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5&-1\\10&-2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\6\end{pmatrix}$

$\therefore\ a=3$

<답> ③

7. **출제의도** : 무한등비급수의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
등비수열 $\{a_n\}$의 공비를 r라 하면

$r=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{1}{3}$

수열 $\{{a_n}^2\}$은

첫째항이 ${a_1}^2=9$이고,

공비가 $r^2=\dfrac{1}{9}$인 등비수열이므로

$$\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^2=\frac{9}{1-\frac{1}{9}}$$

$$=\frac{9}{\frac{8}{9}}$$

$$=\frac{81}{8}$$

<답> ①

8. **출제의도** : 확률의 덧셈정리를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :
A^C과 B는 서로 배반사건이므로

$P(A^C\cap B)=0$

$\therefore\ P(A\cap B)=P(B)=\dfrac{3}{10}$

$\therefore\ P(A\cap B^C)=P(A)-P(A\cap B)$

$=\dfrac{3}{5}-\dfrac{3}{10}=\dfrac{3}{10}$

<답> ②

9. **출제의도** : 정적분의 정의를 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}f\left(1+\frac{2k}{n}\right)\frac{2}{n}$$

$$=\int_1^3 f(x)dx$$

$= \int_1^3 \frac{1}{x} dx$

$= [\ln x]_1^3 = \ln 3$

<답> ②

$= P(0.5 \le Z \le 1.5)$

$= P(0 \le Z \le 1.5) - P(0 \le Z \le 0.5)$

$= 0.4332 - 0.1915 = 0.2417$

<답> ⑤

10. **출제의도** : 포물선의 정의를 이용하여 선분의 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y^2 = 12x = 4 \times 3x$ 에서 $F(3,0)$ 이고 준선의 방정식은 $x = -3$ 이다.

$\therefore\ A(1, 2\sqrt{3})$

따라서, 두 점 A, F를 지나는 직선의 방정식은

$y = -\sqrt{3}(x-3)$

이므로 점 B의 x좌표는

$\{-\sqrt{3}(x-3)\}^2 = 12x,\ (x-3)^2 = 4x$

$x^2 - 10x + 9 = 0,\ (x-1)(x-9) = 0$

$\therefore\ x = 9\ (\because\ x > 1)$

$\therefore\ \overline{BD} = 9 - (-3) = 12$

<답> ①

11. **출제의도** : 정규분포를 따를 때 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

과자 1봉지의 무게를 확률변수 X라 하면 X는 정규분포 $N(75, 2^2)$을 따르므로

$P(76 \le X \le 78)$

$= P(\frac{76-75}{2} \le Z \le \frac{78-75}{2})$

12. **출제의도** : 삼수선의 정리를 이용하여 길이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

선분 AB의 중점을 M이라 하면

$\overline{PA} = \overline{PB} = \overline{AB} = 6$

이므로

$\overline{PM} \perp \overline{AB}$

또한, $\overline{PH} \perp \alpha$ 이므로 삼수선의 정리에 의하여

$\overline{HM} \perp \overline{AB}$

따라서,

$\overline{PM} = \sqrt{6^2 - 3^2} = 3\sqrt{3},\ \overline{PH} = 4$

이므로

$\overline{HM} = \sqrt{(3\sqrt{3})^2 - 4^2} = \sqrt{11}$

<답> ①

13. **출제의도** : 무한등비수열의 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$a > 3$ 이므로 $\frac{a}{3} > 1$

$\therefore\ \lim_{n \to \infty} \frac{(\frac{a}{3})^{n+k}}{(\frac{a}{3})^{n+1} + 1}$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{a}{3})^k}{\frac{a}{3}+\frac{1}{(\frac{a}{3})^n}}$$

$$=\frac{(\frac{a}{3})^k}{\frac{a}{3}+0}=(\frac{a}{3})^{k-1}$$

또한, 두 곡선 $y=a^{x-1}$, $y=3^x$의 교점의 x좌표가 k이므로

$a^{k-1}=3^k=3^{k-1}\times 3$

$\therefore\ \frac{a^{k-1}}{3^{k-1}}=(\frac{a}{3})^{k-1}=3$

$$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{(\frac{a}{3})^{n+k}}{(\frac{a}{3})^{n+1}+1}=(\frac{a}{3})^{k-1}=3$$

<답> ③

14. **출제의도** : 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$y'=3^x\ln 3$ 이므로 곡선 $y=3^x$에 접하는 접선의 방정식은

$y-3^k=3^k\ln 3(x-k)$

따라서 점 A의 x좌표는

$-3^k=3^k\ln 3(x-k)$, $x-k=-\frac{1}{\ln 3}$

$\therefore\ x=k-\frac{1}{\ln 3}$

$y'=a^{x-1}\ln a$ 이므로 곡선 $y=a^{x-1}$에 접하는 접선의 방정식은

$y-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a(x-k)$

따라서 점 B의 x좌표는

$-a^{k-1}=a^{k-1}\ln a(x-k)$, $x-k=-\frac{1}{\ln a}$

$\therefore\ x=k-\frac{1}{\ln a}$

따라서,

$\overline{AH}=k-(k-\frac{1}{\ln 3})=\frac{1}{\ln 3}$

$\overline{BH}=k-(k-\frac{1}{\ln a})=\frac{1}{\ln a}$

이므로

$\frac{1}{\ln 3}=\frac{2}{\ln a}$, $\ln a=\ln 9$

$\therefore\ a=9$

<답> ④

15. **출제의도** : 확률의 정의를 이용하여 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

남학생의 수를 n이라 하면 여학생의 수는 $320-n$이므로 수학동아리에 가입한 남학생의 수와 여학생의 수는 각각

$0.6n$, $160-0.5n$

이다.

따라서, 수학동아리에 가입한 학생수는

$0.6n+(160-0.5n)=0.1n+160$

이므로

$$p_1=\frac{0.6n}{0.1n+160}$$

$$p_2=\frac{160-0.5n}{0.1n+160}$$

이때, $p_1=2p_2$ 이므로

$$\frac{0.6n}{0.1n+160}=\frac{2(160-0.5n)}{0.1n+160}$$

$0.6n=320-n,\ 1.6n=320$

$\therefore\ n=200$

<답> ④

16. 출제의도 : 행렬의 성질을 이용하여 참, 거짓을 판별할 수 있는가?

정답풀이 :

ㄱ. $A^2-AB=3E$에서

$A(A-B)=3E$이므로

$A^{-1}=\frac{1}{3}(A-B)$ (참)

ㄴ. $A\left\{\frac{1}{3}(A-B)\right\}=\frac{1}{3}(A-B)A=E$

이므로

$A(A-B)=(A-B)A$

$A^2-AB=A^2-BA$

$\therefore\ AB=BA$ (참)

ㄷ. $AB=BA$ 이므로

$A^2B-B^2A=A^2B-AB^2$

또, $A^2-AB=3E$의 양변에 B를 곱하면

$A^2B-AB^2=3B$

따라서 조건 $A^2B-B^2A=A+B$에서

$3B=A+B,\ A=2B$

이므로

$A^2-AB=3E$에 대입하면

$(2B)^2-2BB=3E$

$4B^2-2B^2=3E$

$2B^2=3E$

$\therefore\ B^2=\frac{3}{2}E$

$$\begin{aligned}\therefore\ (A+2B)^2&=(2B+2B)^2\\&=16B^2\\&=16\times\frac{3}{2}E\\&=24E\ \text{(참)}\end{aligned}$$

따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ이다.

<답> ⑤

17. 출제의도 : 수열의 일반항을 구하는 과정을 이해하여 식의 값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$b_{n+1}=b_n+\frac{1}{(n+1)(n+2)}$ 에서

$b_{n+1}-b_n=\frac{1}{(n+1)(n+2)}=\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}$

이때, n에 $1,2,\cdots,n-1$을 차례대로 대입하면

$b_2-b_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$

$b_3-b_2=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$

$\cdots$

$b_n-b_{n-1}=\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$

위의 식을 좌변은 좌변끼리 우변은 우변끼리 더하면

$b_n-b_1=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}$

$\therefore\ b_n=1-\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}$

따라서,

$S_n = (n+1)! \times b_n = (n+1)! \times \dfrac{n}{n+1} = n \times n!$

$\therefore\ a_n = nS_{n-1} + (n-1)!$

$= n\{(n-1) \times (n-1)!\} + (n-1)!$

$= (n^2 - n + 1)(n-1)!$

따라서, $f(n) = n$, $g(n) = n^2 - n + 1$ 이므로

$f(7) + g(6) = 7 + 31 = 38$

<답> ③

18. **출제의도** : 표본평균의 확률을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{X} = 2$인 경우는

(1, 3), (3, 1), (2, 2)

이므로

$P(\overline{X} = 2) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{5}{8} + \dfrac{5}{8} \times \dfrac{1}{8} + \dfrac{2}{8} \times \dfrac{2}{8}$

$= \dfrac{5+5+4}{64}$

$= \dfrac{7}{32}$

<답> ⑤

19. **출제의도** : 직선과 평면의 방정식을 이용하여 점의 좌표를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

평면 α의 법선벡터는 (2, −1, 1)이므로 평면 α의 방정식은

$2(x-2) - (y-5) + (z-7) = 0$

$2x - y + z = 6$

또한, $\overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{AQ} = |\overrightarrow{AP}|^2 = 6$ 에서

$|\overrightarrow{AP}| = \sqrt{6}$

따라서, $\dfrac{x}{2} = 6 - y = z - 6 = t \quad (t > 0)$라 하면

$a = 2t,\ b = 6 - t,\ c = t + 6$

이므로 $A(2t, 6-t, t+6)$이고 점 A와 평면 α 사이의 거리가 $\sqrt{6}$이므로

$\dfrac{|2 \times 2t - (6-t) + t + 6 - 6|}{\sqrt{2^2 + (-1)^2 + 1^2}}$

$= \dfrac{|6t - 6|}{\sqrt{6}} = \sqrt{6}$

$|t - 1| = 1$

$\therefore\ t = 2 \ (\because t > 0)$

$\therefore\ a + b + c = 2t + 12 = 16$

<답> ②

20. **출제의도** : 도형의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

내접원과 선분 AC의 접점을 M이라 하면

$\overline{AM} = \dfrac{1}{\tan\dfrac{\theta}{2}}$

이므로

$\overline{AB} = \overline{BC} = \dfrac{\overline{AM}}{\cos\theta} = \dfrac{1}{\cos\theta \tan\dfrac{\theta}{2}}$

또한, 선분 AD의 연장선에 점 C에서 내린 수선의 발을 H라 하면

$$\overline{CH}=\overline{BC}\times\sin2\theta=\frac{\sin2\theta}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\therefore\ \overline{CD}=\frac{\overline{CH}}{\sin3\theta}=\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}$$

$\therefore\ S(\theta)$

$$=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{CD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin2\theta}{\sin3\theta\cos\theta\tan\frac{\theta}{2}}\times\sin\theta$$

$$=\frac{\sin^2\theta}{\tan^2\frac{\theta}{2}\sin3\theta\cos\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2\times\left(\frac{\frac{\theta}{2}}{\tan\frac{\theta}{2}}\right)^2\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{\cos\theta}\times\frac{4}{3}\right\}$$

$$=1^2\times1^2\times1\times1\times\frac{4}{3}=\frac{4}{3}$$

<답> ④

<다른 풀이>

내접원과 선분 AB의 접점을 E라 하면

$$\overline{AE}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

$$\overline{BE}=\frac{1}{\tan\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\tan\theta$$

$$\therefore\ \overline{AB}=\overline{BC}=\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta$$

또한,

$$\overline{AC}:\overline{CD}=\overline{AB}:\overline{BD}$$

$$=\overline{BC}:\overline{BD}$$

이므로

$$\overline{BC}\times\overline{CD}=\overline{AC}\times\overline{BD}$$

이때,

$$\overline{AC}=2\overline{AE}=\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}$$

이고 삼각형 BCD에서 사인법칙에 의하여

$$\frac{\overline{BD}}{\sin\theta}=\frac{\overline{BC}}{\sin(\pi-3\theta)}=\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore\ \overline{BD}=\sin\theta\left(\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}\right)$$

$\therefore\ S(\theta)$

$$=\frac{1}{2}\overline{BC}\times\overline{CD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\overline{AC}\times\overline{BD}\sin\theta$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{2}{\tan\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\frac{1}{\tan\frac{\theta}{2}}+\tan\theta}{\sin3\theta}\times\sin^2\theta$$

$$=\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\left(\frac{\cos\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}+\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)\times\frac{\sin^2\theta}{\sin3\theta}$$

$$\therefore\ \lim_{\theta\to+0}\{\theta\times S(\theta)\}$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left\{2\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\cos\frac{\theta}{2}\times\left(2\times\frac{\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}\right.\right.$$

$$\left.\left.\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\cos\frac{\theta}{2}+\frac{\sin^2\theta}{\cos\theta}\right)\right\}$$

$$\times\frac{\sin\theta}{\theta}\times\frac{3\theta}{\sin3\theta}\times\frac{1}{3}$$

$$=2\times1\times1\times(2\times1\times1\times1+0)\times1\times1\times\frac{1}{3}$$

$$=\frac{4}{3}$$

21. **출제의도** : 여러 가지 수열의 합을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 점 $B(1,0)$, $C(2^m,m)$을 지나는 직선의 방정식은

$$y=\frac{m}{2^m-1}(x-1)$$

이므로 점 D의 좌표는

$$D(2^n,\frac{m}{2^m-1}(2^n-1))$$

따라서, 삼각형 ABD의 넓이가 $\frac{m}{2}$보다 작거나 같으므로

$$\frac{1}{2}\times(2^n-1)\times\frac{m}{2^m-1}(2^n-1)\le\frac{m}{2}$$

$(2^n-1)^2\le2^m-1$

이때, $n=1$ 이면

$1\le2^m-1$, $2\le2^m$ 이므로 $a_1=1$

또한, 2이상의 모든 자연수 n에 대하여

$(2^n-1)^2\le2^{2n}-1$

이므로 $2n\le m$ 이면 된다.

$\therefore$ $a_1=1$, $a_n=2n(n\ge2)$

$$\therefore\ \sum_{n=1}^{10}a_n=a_1+\sum_{n=2}^{10}2n$$

$$=1+\frac{9(4+20)}{2}=109$$

<답> ①

22. **출제의도** : 로그방정식의 해를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\log_2(x+6)=5$에서

$x+6=2^5=32$

$\therefore$ $x=26$

<답> 26

23. **출제의도** : 미분계수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$f'(x)=-\sin x+8e^{2x}$ 이므로

$f'(0)=8$

<답> 8

24. **출제의도** : 무리방정식의 모든 실근의 곱을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\sqrt{x^2-6x-1}=t$ $(t\ge0)$라 하면

$(t^2+1)-t=3$, $t^2-t-2=0$

$(t-2)(t+1)=0$

$\therefore\ t=2\ (\because t \geq 0)$

$\sqrt{x^2-6x-1}=2,\ x^2-6x-1=4$

$x^2-6x-5=0$

따라서, 모든 실근의 곱은 이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 -5이므로

$k=-5$

$\therefore\ k^2=25$

<답> 25

25. **출제의도** : 실생활 문제를 로그를 이용하여 구할 수 있는가?

정답풀이 :

두 원본 A, B를 압축했을 때, 최대 신호 대 잡음비는 각각 P_A, P_B이고 평균 제곱오차는 각각 E_A, E_B이므로

주어진 식에 대입하면

$P_A=20\log 255-10\log E_A$

$P_B=20\log 255-10\log E_B$

이때, 두 식을 변끼리 빼면

$P_A-P_B=-10\log E_A+10\log E_B$

$P_A-P_B=10\log\dfrac{E_B}{E_A}$

이때, $E_B=100E_A$이므로

$P_A-P_B=10\log\dfrac{100E_A}{E_A}$

$=10\log 100$

$=20$

<답> 20

26. **출제의도** : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

구하는 경우의 수는 1부터 19까지의 10개의 홀수 중에서 중복을 허락하여 3개를 택하는 방법의 수와 같다.

$\therefore\ {}_{10}\mathrm{H}_3={}_{10+3-1}\mathrm{C}_3$

$=\dfrac{12\times11\times10}{3\times2\times1}=220$

<답> 220

27. **출제의도** : 타원의 정의를 이용하여 삼각형의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$\overline{\mathrm{FP}}=a,\ \overline{\mathrm{F'P}}=b$라 하자.

타원의 장축의 길이가 6이므로 타원의 정의에 의해

$a+b=6\ \cdots$ ㉠

주어진 타원의 두 초점 사이의 거리는

$2\times\sqrt{9-4}=2\sqrt{5}$

이므로 직각삼각형 FPF′에서

$a^2+b^2=(2\sqrt{5})^2=20\ \cdots$ ㉡

㉠, ㉡에서

$a=2,\ b=4\ (\because\ b>a)$

$\angle\mathrm{F'FP}=\theta$라 하면

$\sin\theta=\dfrac{4}{2\sqrt{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

이므로 삼각형 QF′F의 넓이는

$\dfrac{1}{2}\times\overline{\mathrm{FF'}}\times\overline{\mathrm{QF}}\times\sin\theta$

$=\frac{1}{2}\times 2\sqrt{5}\times 6\times\frac{2}{\sqrt{5}}=12$

<답> 12

28. **출제의도** : 정적분으로 나타내어진 함수의 최댓값을 이용하여 곡선으로 둘러싸인 부분의 넓이를 구할 수 있는가?

정답풀이 :
정적분과 미분의 관계에서

$f'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x (a-t)e^t dt=(a-x)e^x$

이므로

$f'(x)=0$에서

$x=a$

따라서 함수 $f(x)$는 $x=a$에서 극대이자 최댓값을 갖는다.

부분적분법에 의하여

$$f(x)=\int_0^x (a-t)e^t dt$$
$$=\left[(a-t)e^t\right]_0^x-\int_0^x(-e^t)dt$$
$$=\left[(a-t)e^t\right]_0^x+\left[e^t\right]_0^x$$
$$=(a-x)e^x-a+e^x-1$$
$$=(a+1-x)e^x-a-1$$

이므로 최댓값은

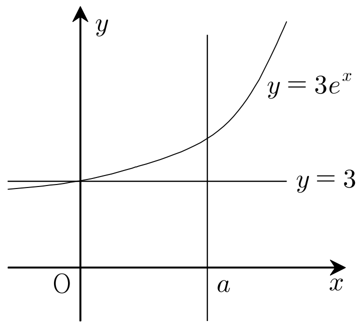
$f(a)=e^a-a-1=32$

$\therefore\ e^a-a=33\ \cdots$ ㉠

곡선 $y=3e^x$과 직선 $y=3$이 만나는 점의 x좌표를 t라 하면

$3e^t=3$에서

$t=0$



따라서 곡선 $y=3e^x$과 두 직선 $x=a$, $y=3$으로 둘러싸인 부분의 넓이는

$$\int_0^a(3e^x-3)dx=\left[3e^x-3x\right]_0^a$$
$$=(3e^a-3a)-(3-0)$$
$$=3(e^a-a)-3$$
$$=3\times 33-3\ (\because\ ㉠)$$
$$=96$$

<답> 96

29. **출제의도** : 두 평면이 이루는 각의 크기를 구하여 정사영의 넓이의 최댓값을 구할 수 있는가?

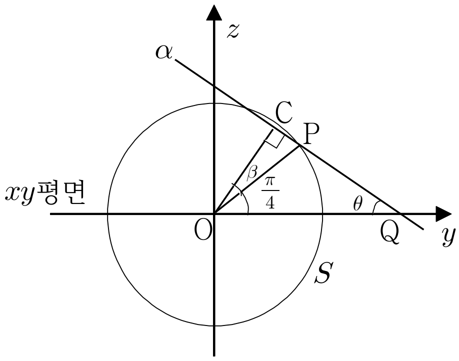
정답풀이 :
원 C를 포함하는 평면을 α라 하고 xy평면과 평면 α가 이루는 각의 크기를 θ $\left(0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right)$라 하면 (나)에서 원 C의 넓이는 1이므로 정사영의 넓이는

$\pi\times\cos\theta$

이다.

따라서 정사영의 넓이가 최대가 되려면 θ가 최소가 되어야 한다.

원 C의 중심을 C라 하고 직선 CP가 xy평면과 만나는 점을 Q라 하자.



이때 $\overline{\text{OP}}=\sqrt{50}$, $\angle\text{OCQ}=\frac{\pi}{2}$이고

(나)에서 $\overline{\text{CP}}=1$이므로

$\overline{\text{OC}}=\sqrt{50-1}=7$

따라서 $\angle\text{COP}=\beta$라 하면

$\cos\beta=\frac{7}{\sqrt{50}}$, $\sin\beta=\frac{1}{\sqrt{50}}$

이때 이면각의 크기 θ가 최소가 되려면 점 C의 z좌표가 최대이어야 하고,

이때 두 점 C, P의 y좌표가 서로 같아야 한다.

따라서 θ가 최소가 되는 경우는 그림과 같이 점 Q가 y축 위에 있을 때이다.

이때 직선 OP와 y축이 이루는 예각의 크기는 $\frac{\pi}{4}$이므로 직각삼각형 OCQ에서

$$\theta=\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)$$

$$\begin{aligned}\cos\theta&=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\right)\\&=\sin\left(\frac{\pi}{4}+\beta\right)\\&=\sin\frac{\pi}{4}\cos\beta+\cos\frac{\pi}{4}\sin\beta\\&=\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{7}{\sqrt{50}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\times\frac{1}{\sqrt{50}}\\&=\frac{8}{\sqrt{100}}=\frac{4}{5}\end{aligned}$$

따라서 원 C의 xy평면 위로의 정사영의 넓이의 최댓값은

$$\pi\times\frac{4}{5}=\frac{4}{5}\pi$$

이다.

$\therefore\ p+q=5+4=9$

<답> 9

30. **출제의도** : 주어진 함수가 미분가능할 조건을 구할 수 있는가?

정답풀이 :

$$|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1}+1 & (x<-1)\\ e^{x+1}-1 & (x\geq-1)\end{cases}$$

이므로

$$\frac{d}{dx}|f(x)|=\begin{cases}-e^{x+1} & (x<-1)\\ e^{x+1} & (x>-1)\end{cases}$$

이다.

따라서 $p(x)=100|f(x)|$라 하면 함수 $p(x)$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고,

$$\lim_{x\to-1-0}p'(x)=-100,$$

$$\lim_{x\to-1+0}p'(x)=100$$

이다.

한편, $k=2m-1$ (m은 자연수)일 때,

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1$이므로

$f(x^k)=e^{x^{2m-1}+1}-1=0$에서

$x=-1$

$\therefore\ |f(x^{2m-1})|$

$$=\begin{cases}-e^{x^{2m-1}+1}+1 & (x<-1)\\ e^{x^{2m-1}+1}-1 & (x\geq-1)\end{cases}$$

$\therefore\ \frac{d}{dx}|f(x^{2m-1})|$

$$=\begin{cases} -(2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x<-1) \\ (2m-1)x^{2m-2}e^{x^{2m-1}+1} & (x>-1) \end{cases}$$

따라서 $q(x^{2m-1})=|f(x^{2m-1})|$이라 하면 함수 $q(x^{2m-1})$는 $x=-1$에서 미분가능하지 않고,

$$\lim_{x\to-1-0} q'(x^{2m-1})=-(2m-1),$$

$$\lim_{x\to-1+0} q'(x^{2m-1})=2m-1$$

이다.

또, $k=2m$ (m은 자연수)일 때,

$f(x^k)=e^{x^{2m}+1}-1$이므로 모든 실수 x에 대하여 $f(x^k)>0$이다.

따라서

$$|f(x^k)|=e^{x^{2m}+1}-1$$

이므로

$$\frac{d}{dx}|f(x^k)|=2mx^{2m-1}e^{x^{2m}+1}$$

따라서 $r(x^{2m})=|f(x^{2m})|$이라 하면 함수 $r(x^{2m})$은 실수 전체 집합에서 미분가능하다.

이제 $n=2m-1$ 또는 $n=2m$일 때

함수 $100|f(x)|-\sum_{k=1}^{m}|f(x^{2k-1})|$를 $s(x)$라 하자. 즉,

$$s(x)=p(x)-\sum_{k=1}^{m}q(x^{2k-1})$$

이때 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하면 함수 $g(x)$는 실수 전체의 집합에서 미분가능하다.

$x\neq-1$일 때

$$s'(x)=p'(x)-\sum_{k=1}^{m}q'(x^{2k-1})$$

이므로

$$\lim_{x\to-1-0} s'(x)=-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$$

$$\lim_{x\to-1+0} s'(x)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$$

이때 함수 $s(x)$가 $x=-1$에서 미분가능하려면

$$\lim_{x\to-1-0} s'(x)=\lim_{x\to-1+0} s'(x)$$

즉,

$$-100+\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=100-\sum_{k=1}^{m}(2k-1)$$

이어야 한다.

$\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=m^2=100$에서

$m=10$

따라서 $n=2m-1$ 또는 $n=2m$이므로

$n=19$ 또는 $n=20$

이다.

따라서 구하는 모든 자연수 n의 값의 합은

$19+20=39$

<답> 39