2014학년도 대학수학능력시험 수학영역 B형 정답 및 풀이 (홀수형)

1.
출제의도 : 행렬의 덧셈을 할 수 있는가?

$$A+B=\begin{pmatrix}2&0\\1&0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}a&0\\2&-3\end{pmatrix}$$
$$=\begin{pmatrix}2+a&0\\3&-3\end{pmatrix}$$

행렬 $A+B$의 모든 성분의 합이 6이므로

$2+a+3+(-3)=2+a=6$

$\therefore\ a=4$

<답> ④

2.
출제의도 : 삼각함수의 배각공식을 이해하고 있는가?

$$\sec^2\theta=1+\tan^2\theta=1+\left(\frac{\sqrt{5}}{5}\right)^2$$
$$=\frac{25+5}{25}=\frac{30}{25}\text{이므로}$$

$$\cos^2\theta=\frac{25}{30}=\frac{5}{6}$$

$$\therefore \cos 2\theta=2\cos^2\theta-1$$
$$=2\times\frac{5}{6}-1=\frac{2}{3}$$

<답> ③

3.
출제의도 : 좌표공간의 두 점의 내분점을 구할 수 있는가?

선분 AB를 $3:2$로 내분하는 점을 P라 하면

$\mathrm{P}\left(\frac{-6+2a}{5},\frac{10}{5},5\right)$이므로

$$\left(\frac{-6+2a}{5},\frac{10}{5},5\right)=(0,b,5)$$

$\frac{-6+2a}{5}=0$에서 $a=3$

$\frac{10}{5}=b$ 에서 $b=2$

$\therefore\ a+b=3+2=5$

<답> ⑤

4.
출제의도 : 등차수열의 일반항을 구할 수 있는가?

등차수열 $\{a_n\}$의 공차를 d라 하면

$a_3=2+2d$, $a_9=2+8d$이므로

$a_9=3a_3$에서

$2+8d=3(2+2d)$

$2+8d=6+6d$

$2d=4$

$d=2$

$\therefore\ a_5=2+4d=2+8=10$

<답> ①

5.
출제의도 : 확률의 성질을 이해하고 있는가?

$A^c\cup B^c=(A\cap B)^c$ 에서

$$\mathrm{P}(A^c\cup B^c)=\mathrm{P}((A\cap B)^c)$$
$$=1-\mathrm{P}(A\cap B)=\frac{4}{5}$$

$$\therefore \mathrm{P}(A\cap B)=\frac{1}{5}$$

$\mathrm{P}(A\cap B^c)=\mathrm{P}(A)-\mathrm{P}(A\cap B)$

$=\mathrm{P}(A)-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{4}$

$\therefore \mathrm{P}(A)=\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{9}{20}$

$\therefore \mathrm{P}(A^c)=1-\mathrm{P}(A)=1-\dfrac{9}{20}=\dfrac{11}{20}$

<답> ②

6.
출제의도 : 두 직선이 수직일 조건을 알고 있는가?

직선 $x=4-y=z-1$의 방향벡터를 $\vec{u}$라 하면

$\vec{u}=(1,\ -1,1)$

또, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-5,\ -5,3-a)$

$\vec{u}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$이므로

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-5+5+3-a=0$에서 $a=3$

<답> ①

7.
출제의도 : 삼각함수의 합성을 이용하여 최댓값을 구할 수 있는가?

$f(x)=2\cos^2 x+k\sin 2x-1$

$=2\times\dfrac{1+\cos 2x}{2}+k\sin 2x-1$

$=k\sin 2x+\cos 2x$

$=\sqrt{k^2+1}\,\sin(2x+\alpha)$

(단, $\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{k^2+1}}$,$\cos\alpha=\dfrac{k}{\sqrt{k^2+1}}$)

따라서, 함수 $f(x)$의 최댓값은 $\sqrt{k^2+1}$ 이므로

$\sqrt{k^2+1}=\sqrt{10}$, $k^2=9$

$k>0$ 이므로 $k=3$

<답> ③

8.
출제의도 : 포물선의 접선의 방정식을 구할 수 있는가?

두 직선 l_1, l_2의 기울기 m_1, m_2 $(m_1<m_2)$가 방정식 $2x^2-3x+1=0$의 두 근이므로

$2x^2-3x+1=(2x-1)(x-1)=0$에서

$x=\dfrac{1}{2}$ 또는 $x=1$

$\therefore\quad m_1=\dfrac{1}{2},\quad m_2=1$

즉, 두 직선 l_1, l_2의 기울기는 각각 $\dfrac{1}{2}$, 1이라고 할 수 있다.

두 직선 l_1, l_2는 포물선 $y^2=8x=4\cdot 2x$의 접선이므로

(i) 기울기 $m_1=\dfrac{1}{2}$인 접선 l_1의 방정식은

$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{2}{\frac{1}{2}}=\dfrac{1}{2}x+4$ …… ㉠

(ii) 기울기 $m_2=1$인 접선 l_2의 방정식은

$y=x+2$ …… ㉡

두 직선의 방정식 ㉠, ㉡을 연립하면

$\dfrac{1}{2}x+4=x+2,\ \dfrac{1}{2}x=2$

$\therefore x=4$

따라서 구하는 교점의 x좌표는 4이다.

<답> ④

9.

출제의도 : 중복조합을 이용하여 경우의 수를 구할 수 있는가?

숫자 $1, 2, 3$의 개수를 각각 a, b, c라 하자.

(i) 숫자 4가 택해지지 않은 경우

구하는 경우의 수는 $a+b+c=5$를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수이므로

${}_3\mathrm{H}_5 = {}_7\mathrm{C}_5 = {}_7\mathrm{C}_2 = 21$

(ii) 숫자 4가 한 개 택해지는 경우

구하는 경우의 수는 $a+b+c=4$를 만족시키는 음이 아닌 정수의 순서쌍 (a, b, c)의 개수이므로

${}_3\mathrm{H}_4 = {}_6\mathrm{C}_4 = {}_6\mathrm{C}_2 = 15$

(i), (ii)에서 구하는 경우의 수는

$21+15=36$

<답> ④

10.

출제의도 : 함수의 그래프를 이용하여 분수부등식의 해를 구할 수 있는가?

$$\frac{g(x)}{f(x)} \le 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{g(x)-f(x)}{f(x)} \le 0$$

$$\Leftrightarrow f(x)\{g(x)-f(x)\} \le 0,\ f(x) \ne 0$$

(i) $f(x)<0,\ g(x) \ge f(x)$

일 때, $-2<x<0,\ 2<x \le 4$

이므로 정수 x의 값은 $-1, 3, 4$이다.

(ii) $f(x)>0,\ g(x) \le f(x)$

일 때, $-4 \le x \le \alpha,\ \beta \le x < 2$

이고, $-4<\alpha<-3,\ 0<\beta<1$이므로

정수 x의 값은 $-4, 1$이다.

(i),(ii)에 의하여 구하는 정수 x의 개수는 5이다.

<답> ⑤

11.

출제의도 : 조건을 만족시키는 일반항 $\{a_n\}$을 구할 수 있는가?

모든 항이 양수인 수열 $\{a_n\}$은

$a_1 = 10,$

$(a_{n+1})^n = 10(a_n)^{n+1}\ (n \ge 1)$ ⋯⋯㉠

식 ㉠의 양변에 상용로그를 취하면

$n\log a_{n+1} = (n+1)\log a_n + 1$

이다. 양변을 $n(n+1)$로 나누면

$$\frac{\log a_{n+1}}{n+1} = \frac{\log a_n}{n} + \boxed{\frac{1}{n(n+1)}}$$

이다.

$b_n = \dfrac{\log a_n}{n}$이라 하면

$b_1 = 1$이고 $b_{n+1} = b_n + \boxed{\dfrac{1}{n(n+1)}}$이다.

$$b_n = b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)$$

$$= b_1 + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right)$$

$$= 1 + \left(1-\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{n-1}-\frac{1}{n}\right)$$

$$= 1+1-\frac{1}{n} = \frac{2n-1}{n}$$

수열 $\{b_n\}$의 일반항을 구하면

$b_n = \boxed{\frac{2n-1}{n}}$

이므로

$\log a_n = n \times \boxed{\frac{2n-1}{n}} \quad \left(\because\ b_n = \frac{\log a_n}{n} \right)$

이다. 그러므로 $a_n = 10^{n \times \boxed{\frac{2n-1}{n}}}$이다.

따라서

$f(n) = \frac{1}{n(n+1)}$, $g(n) = \frac{2n-1}{n}$

이므로

$f(4) = \frac{1}{20}$, $g(10) = \frac{19}{10}$이다.

$\therefore \frac{g(10)}{f(4)} = \frac{\frac{19}{10}}{\frac{1}{20}} = 38$

<답> ①

12.

출제의도 : 함수가 연속일 조건을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

$f(x) = x^2 + ax + b$로 놓으면

$$f(x)g(x) = \begin{cases} \frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} & (x \neq 0, x > -1) \\ 8b & (x = 0) \end{cases}$$

함수 $f(x)g(x)$가 $x=0$에서 연속이므로

$\lim_{x \to 0} \frac{x^2+ax+b}{\ln(x+1)} = 8b$

(i) $x \to 0$일 때, (분모)$\to 0$이므로 (분자)$\to 0$이어야 한다.

즉, $b = 0$

(ii) $\lim_{x \to 0} \frac{x^2+ax}{\ln(x+1)} = 0$에서

$\lim_{x \to 0} \frac{x+a}{\frac{\ln(x+1)}{x}} = \frac{a}{1} = 0$이므로 $a = 0$

(i), (ii)에서 $f(x) = x^2$

$\therefore\ f(3) = 3^2 = 9$

<답> ②

13.

출제의도 : 정적분을 활용하여 회전체의 부피를 구할 수 있는가?

직선 $y = x-1$과 쌍곡선 $x^2 - 2y^2 = 1$의 교점의 좌표를 구하면

$x^2 - 2(x-1)^2 = 1$

$x^2 - 4x + 3 = 0$, $(x-1)(x-3) = 0$

$\therefore\ x = 1$ 또는 $x = 3$

따라서, 교점의 좌표는 $(1, 0)$, $(3, 2)$이다.

직선의 방정식 $x - y - 1 = 0$에서

$x = y + 1$

쌍곡선의 방정식 $x^2 - 2y^2 = 1$에서

$x^2 = 2y^2 + 1$

이므로 구하는 회전체의 부피 V는

$$V = \pi \int_0^2 (y+1)^2 dy - \pi \int_0^2 (2y^2+1) dy$$

$$= \pi \int_0^2 \{(y^2+2y+1) - (2y^2+1)\} dy$$

$$= \pi \int_0^2 (-y^2+2y) dy$$

$$= \pi \left[-\frac{y^3}{3} + y^2 \right]_0^2$$

$$= \pi \left(-\frac{8}{3} + 4 \right)$$

$=\frac{4}{3}\pi$

<답> ③

14.

출제의도 : 회전변환에 의하여 옮겨진 직선의 방정식을 구할 수 있는가?

쌍곡선 $x^2-2y^2=1$, $x^2-\frac{y^2}{\frac{1}{2}}=1$에서

$c^2=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$

$\therefore c=-\frac{\sqrt{6}}{2}$ $(\because c<0)$

$\therefore \mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},\ 0\right)$

직선 l 위에 있는 점 $(x,\ y)$가 원점을 중심으로 θ만큼 회전한 회전변환에 의하여 옮겨진 점을 (x',y')이라 하면

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

이므로

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$\therefore\ x=\cos\theta\cdot x'+\sin\theta\cdot y'$,

$y=-\sin\theta\cdot x'+\cos\theta\cdot y'$

이 식을 직선 l의 방정식 $x-y-1=0$에 대입하면

$(\cos\theta\, x'+\sin\theta\, y')-(-\sin\theta\, x'+\cos\theta\, y')-1=0$

$(\cos\theta+\sin\theta)x'+(\sin\theta-\cos\theta)y'-1=0$ ……㉠

이때 직선 ㉠이 쌍곡선의 초점 $\mathrm{F}\left(-\frac{\sqrt{6}}{2},0\right)$을 지나므로

$(\cos\theta+\sin\theta)\left(-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)-1=0$

$\therefore \sin\theta+\cos\theta=-\frac{2}{\sqrt{6}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$ ……㉡

㉡의 양변을 제곱하면

$(\sin\theta+\cos\theta)^2=1+2\sin\theta\cos\theta$

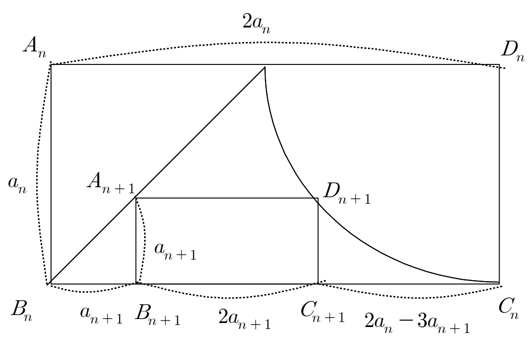
$=1+\sin 2\theta=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$

$\therefore \sin 2\theta=\frac{2}{3}-1=-\frac{1}{3}$

<답> ④

15.

출제의도 : 반복되는 도형에서의 규칙을 찾아 넓이의 극한값을 구할 수 있는가?



직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 세로의 길이를 a_n이라 하면 직사각형 $A_{n+1}B_{n+}C_{n+1}D_{n+1}$의 세로의 길이는 a_{n+1} 이고 $\overline{B_nB_{n+1}}=\overline{A_{n+1}B_{n+1}}$ 이므로 $\overline{C_{n+1}C_n}=2a_n-3a_{n+1}$

또한, 점 D_n을 좌표평면 위의 원점에 놓고 직사각형 $A_nB_nC_nD_n$의 가로와 세로를 x축, y축에 평행하게 놓으면 점 $D_{n+1}(-2a_n+3a_{n+1},a_{n+1}-a_n)$은

원 $x^2+y^2=a_n^2$ 위에 놓이게 된다.

$(-2a_n+3a_{n+1})^2+(a_{n+1}-a_n)^2=a_n^2$

$5a_{n+1}^2-7a_{n+1}a_n+2a_n^2=0$

$(5a_{n+1}-2a_n)(a_{n+1}-a_n)=0$

$\therefore\ a_{n+1}=\frac{2}{5}a_n\ \ (\because a_{n+1}<a_n)$

따라서, 닮음비가 $\frac{2}{5}$ 이므로 넓이의 비는 $\frac{4}{25}$ 이고

$S_1=2\times(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\times1\times1)=\frac{\pi}{2}-1$

에서

$$\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{\frac{\pi}{2}-1}{1-\frac{4}{25}}=\frac{25}{21}(\frac{\pi}{2}-1)$$

<답> ③

16.
출제의도 : 확률밀도함수의 성질을 이용하여 연속확률변수의 평균을 구할 수 있는가?

$\mathrm{P}(0\le X\le a)=1$ 이므로

$ka^2=1\ \cdots$ ㉠

확률변수 X의 확률밀도함수를 $f(x)$라 하면

$\mathrm{P}(0\le X\le x)=\int_0^x f(t)\,dt=kx^2$

등식의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f(x)=2kx$

$\therefore\ \mathrm{E}(X)=\int_0^a xf(x)\,dx$

$=\int_0^a 2kx^2\,dx$

$=\left[\frac{2}{3}kx^3\right]_0^a$

$=\frac{2}{3}ka^3=1$

$\therefore\ ka^3=\frac{3}{2}\ \ \cdots$ ㉡

㉡÷㉠에서 $a=\frac{3}{2}$

㉠에서 $\frac{9}{4}k=1$

$\therefore\ k=\frac{4}{9}$

<답> ②

17.
출제의도 : 주어진 행렬의 조건을 이용하여 참, 거짓을 판단할 수 있는가?

ㄱ. $AB+A^2B=(A+A^2)B=E$ 이므로

$B^{-1}=A+A^2$ (참)

ㄴ. $AB+A^2B=A(B+AB)=E$

$\therefore\ A^{-1}=B+AB$

따라서,

$A^{-1}B^{-1}=E+A,\ B^{-1}A^{-1}=E+A$

에서 $A^{-1}B^{-1}=B^{-1}A^{-1}$ 이므로

$(A^{-1}B^{-1})^{-1}=(B^{-1}A^{-1})^{-1}$

$BA=AB$ (참)

ㄷ. $(A-E)^2+B^2=O$ 에서

$B^2=-A^2+2A-E$

$AB+A^2B=E$ 에서

$B=AB^2+A^2B^2$

$=A(-A^2+2A-E)+A^2(-A^2+2A-E)$

$=-A^4+A^3+A^2-A$

$=-(A^3-A)(A-E)$

따라서, $(A+A^2)B=E$ 이므로

$(A+A^2)\{-(A^3-A)(A-E)\}=E$

$(A^3-A)^2=-E$

$(A^3-A)^2+E=O$ (참)

따라서, 옳은 것은 ㄱ, ㄴ, ㄷ 이다.

<답> ⑤

18.

출제의도 : 수열의 극한의 성질을 이용하여 극한값을 구할 수 있는가?

(i) $a_1+\pi<a_2$

$a_2+\pi<a_3$

$a_3+\pi<a_4$

$\vdots$

$a_{n-1}+\pi<a_n$

위의 식을 변끼리 더하면

$(a_1+a_2+\cdots+a_{n-1})+(n-1)\pi$

$<(a_2+a_3+\cdots+a_n)$

$a_1+(n-1)\pi<a_n$

$\frac{\pi}{4}+(n-1)\pi<a_n$

$\frac{\pi}{4n}+\frac{n-1}{n}\pi<\frac{a_n}{n}$

$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\pi}{4n}+\frac{n-1}{n}\pi\right)\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

$\therefore\ \pi\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}$

(ii) $a_n<(n-1)\pi+\frac{\pi}{2}$이므로

$a_n<\frac{2n-1}{2}\pi$

$\frac{a_n}{n}<\frac{2n-1}{2n}\pi$

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2n-1}{2n}\pi\right)$

$\therefore\ \lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\pi$

(i), (ii)에서 $\pi\le\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}\le\pi$이므로

$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=\pi$

<답> ④

19.

출제의도 : 좌표공간에서 구의 방정식을 구할 수 있는가?

구 S의 반지름의 길이를 r, 중심의 좌표를 $\mathrm{C}(a, b, c)$라 하자.

(단, $a>0, b>0, c>0$)

구 S가 x축과 y축에 접하는 점을 각각 A, B라 하면

$\mathrm{A}(a, 0, 0)$, $\mathrm{B}(0, b, 0)$

이고, $r=\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}$ 이므로

$r^2=b^2+c^2=a^2+c^2$

$\therefore\ a=b$ ($\because\ a>0, b>0$)

따라서, 구 S의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(z-c)^2=a^2+c^2$ $\cdots$ ㉠

으로 놓을 수 있다.

구 S가 xy평면과 만나서 생기는 원의 방정식은

$(x-a)^2+(y-a)^2+(0-c)^2=a^2+c^2$

$(x-a)^2+(y-a)^2=a^2$

이고, 원의 넓이가 64π이므로

$a^2\pi=64\pi$, $a^2=64$

$a>0$이므로 $a=8$

$a=8$을 ㉠에 대입하면 구 S의 방정식은

$(x-8)^2+(y-8)^2+(z-c)^2=64+c^2$

…㉡

구 S가 z축과 만나는 점의 z좌표를 구하기 위해 ㉡에 $x=0, y=0$을 대입하면

$64+64+(z-c)^2=64+c^2$

$(z-c)^2=c^2-64$

$z=c\pm\sqrt{c^2-64}$

구 S가 z축과 만나는 두 점 사이의 거리가 8이므로

$(c+\sqrt{c^2-64})-(c-\sqrt{c^2-64})=8$

$\sqrt{c^2-64}=4$, $c^2-64=16$

$\therefore\ c^2=80$

따라서, 구 S의 반지름의 길이는

$r=\sqrt{a^2+c^2}=\sqrt{64+80}$

$=\sqrt{144}=12$

<답> ②

20.

출제의도 : 상용로그의 지표와 가수의 성질을 이용하여 문제를 해결할 수 있는가?

1보다 큰 실수 x에 대해 $f(x)$, $g(x)$는 $\log x$의 지표와 가수이므로

$\log x=f(x)+g(x)$(단, $f(x)$는 정수, $0\le g(x)<1$)

이때 $3f(x)+5g(x)$의 값이 10의 배수이므로

$3f(x)+5g(x)=10k$ (단, k는 자연수)

로 나타낼 수 있다.

또한, $f(x)$는 정수이므로

$5g(x)=10k-3f(x)$는 정수이고

$0\le g(x)<1$이므로 $0\le 5g(x)<5$에서

$5g(x)=0,1,2,3,4$이어야 한다.

한편, $3f(x)=10k-5g(x)$이므로

조건들을 만족시키는 x의 값은 자연수 k의 값이 작을수록 $5g(x)$의 값이 클수록 작아진다.

따라서 x의 값을 작은 수부터 구하려면 자연수 k는 작은 순서대로, $5g(x)$의 값은 큰 순서대로 구하면 된다.

(i) $k=1$, $5g(x)=4$일 때,

$3f(x)=6$이므로 $f(x)=2$

$\therefore\ \log x=2+\dfrac{4}{5}=\dfrac{14}{5}$

즉 $x=10^{\frac{14}{5}}$

(ii) $k=1$, $5g(x)=1$일 때,

$3f(x)=9$이므로 $f(x)=3$

$\therefore \log x=3+\dfrac{1}{5}=\dfrac{16}{5}$

즉 $x=10^{\frac{16}{5}}$

(iii) $k=2$, $5g(x)=2$일 때,

$3f(x)=18$이므로 $f(x)=6$

$\therefore\ \log x=6+\dfrac{2}{5}=\dfrac{32}{5}$

즉 $x=10^{\frac{32}{5}}$

(iv) $k=3$, $5g(x)=3$일 때,

$3f(x)=27$이므로 $f(x)=9$

$\therefore\ \log x = 9 + \frac{3}{5} = \frac{48}{5}$

즉 $x = 10^{\frac{48}{5}}$

(v) $k=3$, $5g(x)=0$일 때,

$3f(x)=30$이므로 $f(x)=10$

$\therefore\ \log x = 10$

즉 $x = 10^{10}$

(vi) $k=4$, $5g(x)=4$일 때,

$3f(x)=36$이므로 $f(x)=12$

$\therefore \log x = 12 + \frac{4}{5} = \frac{64}{5}$

즉 $x = 10^{\frac{64}{5}}$

따라서 x의 값을 작은 수부터 크기순으로 나열하면

$10^{\frac{14}{5}}, 10^{\frac{16}{5}}, 10^{\frac{32}{5}}, 10^{\frac{48}{5}}, 10^{10}, 10^{\frac{64}{5}}, \cdots\cdots$

이므로

$a = 10^{\frac{16}{5}}$, $b = 10^{\frac{64}{5}}$

$\therefore \log ab = \log a + \log b$

$= \frac{16}{5} + \frac{64}{5}$

$= 16$

<답> ⑤

21.

출제의도 : 주어진 조건과 부분적분법을 이용하여 정적분의 값을 구할 수 있는가?

$f(x) = \frac{\pi}{2}\int_1^{x+1} f(t)\,dt$ ········· ㉠

㉠의 양변을 x에 대하여 미분하면

$f'(x) = \frac{\pi}{2} f(x+1)$이므로

$f(x+1) = \frac{2}{\pi} f'(x)$

$$\pi^2 \int_0^1 x f(x+1)\,dx = \pi^2 \int_0^1 \left\{ x \times \frac{2}{\pi} f'(x) \right\} dx$$

$$= 2\pi \int_0^1 x f'(x)\,dx$$

$\int_0^1 x f'(x)\,dx$에서 $u = x$, $v' = f'(x)$로 놓으면 $u' = 1$, $v = f(x)$이므로

$$\int_0^1 x f'(x)\,dx = [x f(x)]_0^1 - \int_0^1 f(x)\,dx$$

$$= f(1) - \int_0^1 f(x)\,dx$$

한편, 함수 $y = f(x)$의 그래프가 원점에 대하여 대칭이므로 $f(1)=1$에서 $f(-1)=-1$이다.

$-1 = f(-1) = \frac{\pi}{2}\int_1^0 f(t)\,dt$에서

$\int_0^1 f(t)\,dt = \frac{2}{\pi}$

$\therefore\ \pi^2 \int_0^1 x f(x+1)\,dx$

$= 2\pi \times \left\{ f(1) - \int_0^1 f(x)\,dx \right\}$

$= 2\pi \times \left(1 - \frac{2}{\pi}\right)$

$= 2(\pi - 2)$

<답> ①

22.

출제의도 : 지수함수의 도함수를 이용하여 미분계수를 구할 수 있는가?

$f(x) = 5e^{3x-3}$

$f'(x) = 5e^{3x-3} \times 3 = 15e^{3x-3}$

$\therefore\ f'(1)=15e^0=15\times 1=15$

<답> 15

23.
출제의도 : 조건부 확률을 구할 수 있는가?

참가한 회원 50명 중에서 임의로 선택한 한 명이 여성인 사건을 A, 마라톤에서 완주하였을 사건을 B라 하면
구하는 확률은

$$p=\mathrm{P}(B|A)=\frac{\mathrm{P}(A\cap B)}{\mathrm{P}(A)}=\frac{\frac{9}{50}}{\frac{15}{50}}=\frac{9}{15}=\frac{3}{5}$$

$\therefore 100p=100\times\frac{3}{5}=60$

<답> 60

24.
출제의도 : 무리방정식의 근을 구할 수 있는가?

$\sqrt{2x^2-6x}=\frac{1}{2}(2x^2-6x)-4$에서

$\sqrt{2x^2-6x}=t\ \ (t>0)$로 놓으면

$t=\frac{1}{2}t^2-4$

$t^2-2t-8=(t+2)(t-4)=0$

$t=-2$ 또는 $t=4$

$t>0$이므로 $t=4$

$\sqrt{2x^2-6x}=4$에서 $2x^2-6x-16=0$

이차방정식의 근과 계수의 관계에 의하여 $k=-8$이므로 $k^2=(-8)^2=64$

<답> 64

25.
출제의도 : 상용로그의 성질을 이용하여 실생활의 문제를 해결할 수 있는가?

$x=R^{\frac{27}{23}}$일 때의 물의 속력을 v_1이라 하면

$v_1=\frac{1}{2}v_c$이므로

$$\frac{v_c}{v_1}=1-k\log\frac{R^{\frac{27}{23}}}{R}=2$$

$k\log R^{\frac{4}{23}}=-1$, $\frac{4}{23}k\log R=-1$

$\therefore\ k\log R=-\frac{23}{4}\ \cdots$ ㉠

$x=R^a$일 때의 물의 속력을 v_2라 하면

$v_2=\frac{1}{3}v_c$이므로

$$\frac{v_c}{v_2}=1-k\log\frac{R^a}{R}=3$$

$k\log R^{a-1}=-2$, $(a-1)k\log R=-2\cdots$ ㉡

㉠을 ㉡에 대입하면

$(a-1)\times\left(-\frac{23}{4}\right)=-2$

$a-1=\frac{8}{23}$

$\therefore\ a=\dfrac{31}{23}$

$\therefore\ 23a=31$

<답> 31

26.
출제의도 : 표본비율을 이용하여 모비율을 추정할 수 있는가?

표본의 크기가 n일 때 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 표본비율은 $\bar{p}=0.8$이므로 중앙공원을 이용한 경험이 있는 주민의 모비율 p를 신뢰도 95%로 추정한 신뢰구간은

$$\left[0.8-1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}},\ 0.8+1.96\times\sqrt{\frac{0.8\times0.2}{n}}\right]$$

이다. 그러므로

$b-a=2\times1.96\times\sqrt{\dfrac{0.8\times0.2}{n}}=0.098$에서

$\sqrt{n}=\dfrac{2\times1.96\times0.4}{0.098}=16$

따라서 $n=256$

<답> 256

27.
출제의도 : 타원의 정의를 이용하여 조건을 만족시키는 상수의 값을 구할 수 있는가?

타원의 정의에 의하여

$\overline{\mathrm{FP}}+\overline{\mathrm{F'P}}=10$이므로 $\overline{\mathrm{FP}}=10-\overline{\mathrm{F'P}}$

$$\begin{aligned}\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}&=\overline{\mathrm{AP}}-\left(10-\overline{\mathrm{F'P}}\right)\\&=\overline{\mathrm{AP}}+\overline{\mathrm{F'P}}-10\\&\ge\overline{\mathrm{AF'}}-10\end{aligned}$$

$\overline{\mathrm{AP}}-\overline{\mathrm{FP}}$의 최솟값이 1이므로 $\overline{\mathrm{AF'}}=11$

$\mathrm{F'}(-4,0)$이므로

$\overline{\mathrm{AF'}}=\sqrt{16+a^2}=11$

$16+a^2=121$에서 $a^2=105$

<답> 105

28.
출제의도 : 도형의 넓이를 삼각함수로 나타내어 삼각함수의 극한값을 계산할 수 있는가?

$\overline{\mathrm{AC}}=x$라 하면

$\overline{\mathrm{AC}}=\overline{\mathrm{BC}}=\overline{\mathrm{AD}}=\overline{\mathrm{AP}}=x$이다.

이등변삼각형 CAB에서

$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{2}{x}$

$\therefore\ x=\dfrac{2}{\sin\frac{\theta}{2}}$

따라서, △BDP의 넓이 $S(\theta)$는

$$\begin{aligned}S(\theta)&=\triangle\mathrm{ADP}-\triangle\mathrm{ABP}\\&=\frac{1}{2}x^2\sin2\theta-\frac{1}{2}\times4\times x\sin2\theta\\&=\frac{2\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\end{aligned}$$

$\therefore\ \lim\limits_{\theta\to+0}\left(\theta\times S(\theta)\right)$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(\frac{2\theta\sin2\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}-\frac{4\theta\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$$=\lim_{\theta\to+0}\left(2\times\frac{\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\times\frac{\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

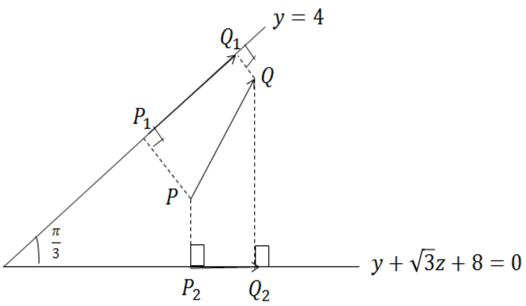
$$-\lim_{\theta\to+0}\left(4\theta\times\frac{\sin2\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\right)$$

$=2\times2\times4-4\times0\times4$

$=16$

<답> 16

29.
출제의도 : 정사영을 이해하고 최댓값을 구할 수 있는가?



두 평면 $y=4$와 $y+\sqrt{3}z+8=0$의 법선벡터를 각각 $\vec{h_1}, \vec{h_2}$라 하면 두 평면이 이루는 예각의 크기 γ는

$\cos\gamma=\frac{|\vec{h_1}\cdot\vec{h_2}|}{|\vec{h_1}||\vec{h_2}|}=\frac{1}{2}$에서 $\gamma=\frac{\pi}{3}$

따라서 벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 벡터 $\overrightarrow{P_1Q_1}$이 이루는 예각의 크기를 α, 벡터 $\overrightarrow{PQ}$와 벡터 $\overrightarrow{P_2Q_2}$가 이루는 예각의 크기를 β라 하면 $\alpha+\beta\le\frac{2}{3}\pi$이다.

이때

$$\begin{aligned}&2|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\\&=\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_1Q_1}|^2\right)+\left(|\overrightarrow{PQ}|^2-|\overrightarrow{P_2Q_2}|^2\right)\\&=|\overrightarrow{PQ}|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)\end{aligned}$$

이므로 주어진 식의 값은 $|\overrightarrow{PQ}|$의 값이 클수록 커지고 α와 β의 값이 클수록 커진다.

따라서 $|\overrightarrow{PQ}|=4$이고 $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$일 때 최댓값을 갖는다.

$\therefore |\overrightarrow{PQ}|^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta)=$

$|\overrightarrow{PQ}|^2\left\{1-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)\right\}$

$\le 4^2\left\{1-\frac{1}{2}(\cos2\alpha+\cos2\beta)\right\}$

(단, $\alpha+\beta=\frac{2}{3}\pi$)

$=16-8\left\{\cos2\alpha+\cos\left(\frac{4\pi}{3}-2\alpha\right)\right\}$

$=16-8\left(\cos2\alpha-\frac{1}{2}\cos2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha\right)$

$=16-8\left(\frac{1}{2}\cos2\alpha-\frac{\sqrt{3}}{2}\sin2\alpha\right)$

$=16+8\sin\left(2\alpha-\frac{\pi}{6}\right)$

$\le 16+8=24$

(단, 등호는 $2\alpha-\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}$ 즉, $\alpha=\beta=\frac{\pi}{3}$일 때 성립)

그러므로 최댓값은 24이다.

<답> 24

참고

벡터 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$를 점 P가 두 평면 $y=4$, $y+\sqrt{3}z+8=0$의 교선에 놓이도록 평행이동시키면

$$\alpha+\beta\le\frac{2}{3}\pi$$

가 성립함을 보일 수 있다.

30.
출제의도 : 미분법을 이용하여 조건을

만족시키는 값을 구할 수 있는가?

$g(x)=f(x)e^{-x}$

$g'(x)=\{f'(x)-f(x)\}e^{-x}$

$g''(x)=\{f''(x)-2f'(x)+f(x)\}e^{-x}$

$f(x)=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$로 놓으면

$g''(x)=\{ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c\}e^{-x}$

조건 (가)에서 방정식 $g''(x)=0$의 두 근이 $x=1$, $x=4$이므로

이차방정식

$ax^2+(b-4a)x+2a-2b+c=0$은

$x=1$, $x=4$를 두 근으로 갖는다.

근과 계수의 관계에서

$\dfrac{4a-b}{a}=5$, $\dfrac{2a-2b+c}{a}=4$이므로

$b=-a$, $c=0$

즉, $f(x)=ax^2-ax$이고,

$g(x)=(ax^2-ax)e^{-x}$

한편, 곡선 $y=g(x)$ 위의 점 $\mathrm{T}(t, g(t))$에서 그은 접선의 방정식은

$y-g(t)=g'(t)(x-t)$

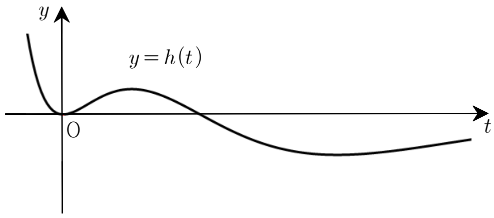
이 접선이 점 $(0, k)$를 지나므로

$k-g(t)=g'(t)(0-t)$에서

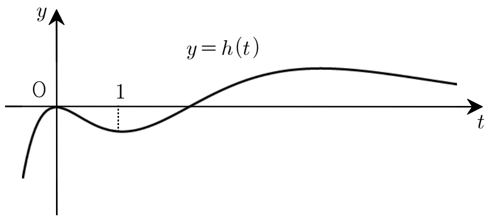
$k=a(t^3-2t^2)e^{-t}$

$h(t)=a(t^3-2t^2)e^{-t}$로 놓으면 조건 (나)에 의하여 함수 $y=h(t)$의 그래프와 직선 $y=k$가 서로 다른 세 점에서 만나도록 하는 실수 k의 값의 범위가 $-1<k<0$이어야 한다.

$a<0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, 문제의 조건을 만족시키지 않는다.



$a>0$인 경우 함수 $y=h(t)$의 그래프의 개형은 다음과 같고, $h(1)=-1$이어야 한다.



$h(1)=-ae^{-1}=-1$에서 $a=e$

$$\therefore\ g(-2)\times g(4)=f(-2)e^2\times f(4)e^{-4}$$
$$=72a^2e^{-2}$$
$$=72e^2e^{-2}=72$$

<답> 72