제 2 교시

수학 영역

5지선다형

1. $\sqrt{\frac{12}{5}} \times \sqrt{\frac{5}{3}}$ 의 값은? [2점]

① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

1. [출제의도] 근호를 포함한 식의 값을 계산한다.

$$\sqrt{\frac{12}{5}} \times \sqrt{\frac{5}{3}} = \sqrt{\frac{12}{5} \times \frac{5}{3}} = \sqrt{4} = 2$$

2. 다항식 $(2x+1)^2-(2x^2+x-1)$의 일차항의 계수는? [2점]

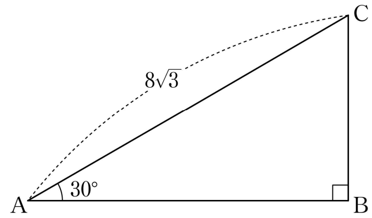
① 1 ② 2 ③ 3 ④ 4 ⑤ 5

2. [출제의도] 다항식을 정리하여 일차항의 계수를 계산한다.

$$\begin{aligned}(2x+1)^2-(2x^2+x-1) &= (4x^2+4x+1)-(2x^2+x-1)\\ &= 4x^2+4x+1-2x^2-x+1\\ &= 2x^2+3x+2\end{aligned}$$

따라서 일차항의 계수는 3

3. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AC}}=8\sqrt{3}$, $\angle\mathrm{A}=30°$, $\angle\mathrm{B}=90°$인 직각삼각형 ABC에서 선분 AB의 길이는? [2점]



① 9 ② 10 ③ 11 ④ 12 ⑤ 13

3. [출제의도] 삼각비를 이용하여 삼각형의 변의 길이를 계산한다.

삼각형 ABC에서 $\cos 30° = \frac{\overline{\mathrm{AB}}}{8\sqrt{3}}$

$$\overline{\mathrm{AB}} = 8\sqrt{3} \times \cos 30° = 8\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 12$$

4. 좌표평면 위의 두 점 $(1, -1)$, $(2, 1)$을 지나는 직선의 y절편은? [3점]

① -3 ② -2 ③ -1 ④ 0 ⑤ 1

4. [출제의도] 직선의 방정식을 이해하여 직선의 y절편을 구한다.

두 점 $(1, -1)$, $(2, 1)$을 지나는 직선의 기울기를 a, y절편을 b라 하자.

$a = \frac{1-(-1)}{2-1} = 2$이므로

두 점 $(1, -1)$, $(2, 1)$을 지나는 직선의 방정식은

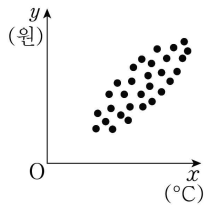
$y = 2x + b$

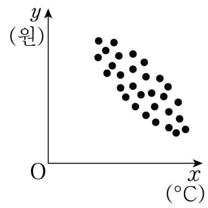
이 직선이 점 $(1, -1)$을 지나므로

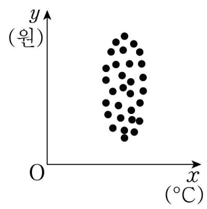
$-1 = 2\times 1 + b$

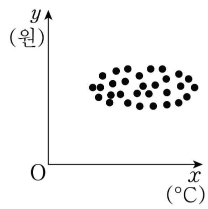
$b = -3$

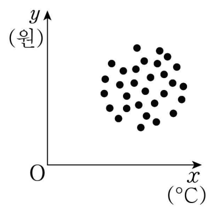
5. 어느 회사가 위치한 지역의 일일 최저 기온(℃)과 이 회사의 일일 난방비(원)를 30일 동안 조사한 결과, 일일 최저 기온이 높을수록 일일 난방비가 감소한다고 한다. 일일 최저 기온을 x℃, 일일 난방비를 y원이라 할 때, x와 y 사이의 상관관계를 나타낸 산점도로 가장 적절한 것은? [3점]

①


②


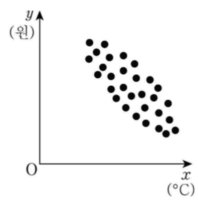
③


④


⑤


5. [출제의도] 상관관계를 이해하여 적절한 산점도를 추론한다.

일일 최저 기온이 높을수록 일일 난방비가 감소하므로 두 변량 x, y 사이에는 음의 상관관계가 있다.
따라서 x와 y 사이의 상관관계를 나타낸 산점도로 가장 적절한 것은 다음과 같다.



6. 원 위의 두 점 A, B에 대하여 호 AB의 길이가 원의 둘레의 길이의 $\frac{1}{5}$일 때, 호 AB에 대한 원주각의 크기는? [3점]

① 36° ② 40° ③ 44° ④ 48° ⑤ 52°

6. [출제의도] 원주각과 중심각 사이의 관계를 이해하여 원주각의 크기를 구한다.

호의 길이는 중심각의 크기에 비례하므로
호 AB에 대한 중심각의 크기는

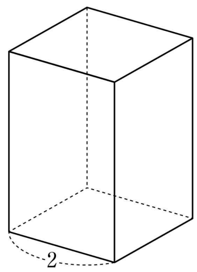
$360° \times \frac{1}{5} = 72°$

호에 대한 원주각의 크기는 중심각의 크기의 $\frac{1}{2}$배이므로 호 AB에 대한 원주각의 크기는

$72° \times \frac{1}{2} = 36°$

7. 한 변의 길이가 2인 정사각형을 밑면으로 하는 직육면체의 부피가 12일 때, 이 직육면체의 겉넓이는? [3점]

① 24 ② 26 ③ 28 ④ 30 ⑤ 32



7. [출제의도] 입체도형을 이해하여 직육면체의 겉넓이를 구한다.

직육면체의 높이를 h라 하면 부피는
$2 \times 2 \times h = 12$, $h = 3$
직육면체의 겉넓이는
$2 \times$(밑면의 넓이)$+$(옆면의 넓이)$= 2 \times 4 + 4 \times 2 \times 3$
$= 8 + 24 = 32$

8. 다음은 어느 학급 학생 25명을 대상으로 키를 조사하여 나타낸 도수분포표이다.

키(cm)	학생 수(명)
150 이상 ~ 160 미만	a
160 ~ 170	8
170 ~ 180	b
180 ~ 190	6
합계	25

이 학생들 중에서 키가 170cm 미만인 학생 수가 조사한 학생 수의 40%일 때, 키가 170cm 이상 180cm 미만인 학생 수는? [3점]

① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

8. **[출제의도] 도수분포표를 이해하여 계급의 도수를 구한다.**

조사한 학생의 수가 25이고

키가 170cm 미만인 학생의 수는 $a+8$이므로

$\frac{a+8}{25}=\frac{40}{100}$

$a+8=10$, $a=2$

조사한 학생의 수가 25이므로

$a+8+b+6=2+8+b+6=25$

따라서 $b=9$

9. 두 일차방정식 $ax+2y-b=0$, $2ax+by-3=0$의 그래프의 교점의 좌표가 $(2, 1)$일 때, $a+b$의 값은? (단, a, b는 상수이다.) [3점]

① $\frac{3}{2}$ ② 2 ③ $\frac{5}{2}$ ④ 3 ⑤ $\frac{7}{2}$

9. **[출제의도] 일차함수와 일차방정식의 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.**

두 일차방정식

$ax+2y-b=0$ …… ㉠

$2ax+by-3=0$ …… ㉡

의 그래프의 교점의 좌표가 $(2, 1)$이므로

$x=2$, $y=1$을 ㉠, ㉡에 각각 대입하면

$2a-b+2=0$, $4a+b-3=0$

a, b에 대한 연립방정식

$\begin{cases} 2a-b=-2 & \cdots\cdots ㉢ \\ 4a+b=3 & \cdots\cdots ㉣ \end{cases}$

에서 ㉢과 ㉣을 변끼리 더하면

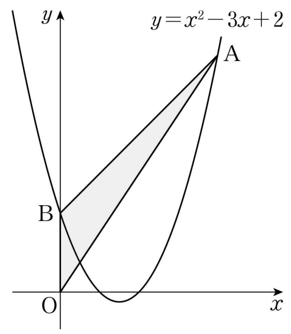
$6a=1$, $a=\frac{1}{6}$

$a=\frac{1}{6}$을 ㉢에 대입하면

$2\times\frac{1}{6}-b=-2$, $b=\frac{7}{3}$

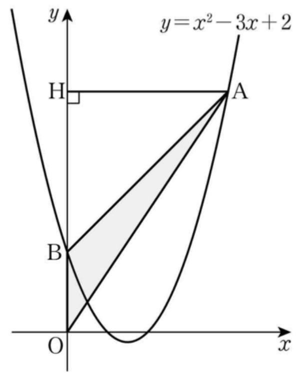
따라서 $a+b=\frac{1}{6}+\frac{7}{3}=\frac{5}{2}$

10. 그림과 같이 제1사분면 위의 점 A(a, b)는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프 위에 있다. 이 이차함수의 그래프가 y축과 만나는 점 B에 대하여 삼각형 OAB의 넓이가 4일 때, $a+b$의 값은? (단, O는 원점이다.) [3점]



① 7 ② 8 ③ 9 ④ 10 ⑤ 11

10. **[출제의도] 이차함수의 그래프를 이해하여 조건을 만족시키는 점의 좌표를 구한다.**



점 B는 이차함수 $y=x^2-3x+2$의 그래프가 y축과 만나는 점이므로

이차함수 $y=x^2-3x+2$에 $x=0$을 대입하면

$y=0^2-3\times0+2=2$

이므로 점 B의 좌표는 $(0, 2)$

점 A에서 y축에 내린 수선의 발을 H$(0, b)$라 하면

$\triangle OAB=\frac{1}{2}\times\overline{OB}\times\overline{AH}$

$=\frac{1}{2}\times2\times a=4$

그러므로 $a=4$, 즉 점 A의 x좌표가 4이므로

이차함수 $y=x^2-3x+2$에 $x=4$, $y=b$를 대입하면

$b=4^2-3\times4+2=6$

이므로 점 A의 좌표는 $(4, 6)$

따라서 $a+b=4+6=10$

11. 어느 학생이 집에서 출발하여 갈 때는 시속 3km로, 집으로 돌아올 때는 같은 경로를 시속 4km로 이동하려고 한다. 이동한 전체 시간이 2시간 이하가 되도록 할 때, 이 학생이 집에서 출발하여 집으로 돌아올 때까지 이동한 거리의 최댓값은? [3점]

① $\frac{45}{7}$km ② $\frac{48}{7}$km ③ $\frac{51}{7}$km
④ $\frac{54}{7}$km ⑤ $\frac{57}{7}$km

12. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 서로 다른 네 점 A(1, 1), B(8, 1), C(6, 4), D(a, b)에 대하여 $\overline{\mathrm{AB}} /\!/ \overline{\mathrm{CD}}$일 때, $a+b$의 값은? [3점]

① 5 ② 6 ③ 7 ④ 8 ⑤ 9

11. [출제의도] 일차부등식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.

학생이 집에서 출발하여 갈 때 이동한 거리를 Lkm라 하자.

$(\text{시간}) = \dfrac{(\text{거리})}{(\text{속력})}$ 이므로

$(\text{갈 때 걸리는 시간}) = \dfrac{L}{3}$ 시간

$(\text{돌아올 때 걸리는 시간}) = \dfrac{L}{4}$ 시간

집에서 출발하여 집으로 돌아올 때까지 걸리는 전체 시간은

$\dfrac{L}{3}+\dfrac{L}{4}=\dfrac{7}{12}L$

이 학생이 집에서 출발하여 집으로 돌아올 때까지 이동한 전체 시간이 2시간 이하가 되어야 하므로

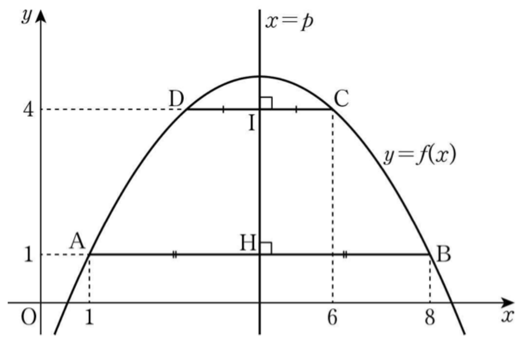
$\dfrac{7}{12}L \le 2,\ L \le \dfrac{24}{7}$

학생이 집에서 출발하여 집으로 돌아올 때까지 이동한 거리는 $2L$이므로

$2L \le \dfrac{48}{7}$

따라서 이동한 거리의 최댓값은 $\dfrac{48}{7}$ km

12. [출제의도] 이차함수의 그래프의 성질을 이해하여 점의 좌표를 구한다.



이차함수 $y=f(x)$의 그래프 위의 두 점 A와 B의 y좌표가 서로 같으므로 직선 AB는 x축에 평행하고 선분 AB의 수직이등분선은 이차함수 $y=f(x)$의 그래프의 축이다.

축의 방정식을 $x=p$라 하자.

선분 AB와 직선 $x=p$가 만나는 점을 H라 하면 $\overline{\mathrm{AH}}=\overline{\mathrm{BH}}$에서

$p-1=8-p$

$p=\dfrac{9}{2}$

직선 CD는 직선 AB에 평행하므로 직선 CD도 x축에 평행한 직선이다.

점 C의 y좌표가 4이므로 직선 CD의 방정식은 $y=4$

점 D(a, b)는 직선 $y=4$ 위에 있으므로 $b=4$

선분 CD와 직선 $x=\dfrac{9}{2}$가 만나는 점을 I라 하면

$\overline{\mathrm{CI}}=\overline{\mathrm{DI}}$이고 점 C의 x좌표가 $\dfrac{9}{2}$보다 크므로 $a<\dfrac{9}{2}$

$6-\dfrac{9}{2}=\dfrac{9}{2}-a$

$a=3$

따라서 $a+b=3+4=7$

13. 두 자연수 a, b에 대하여 다항식 $2x^2+9x+k$가 $(2x+a)(x+b)$로 인수분해되도록 하는 실수 k의 최솟값은? [3점]

① 1 ② 4 ③ 7 ④ 10 ⑤ 13

14. 수직선 위의 두 점 P, Q가 원점에 있다. 동전을 한 번 던질 때마다 두 점 P, Q가 다음 규칙에 따라 이동한다.

(가) 동전의 앞면이 나오면 점 P가 양의 방향으로 2만큼 이동한다.
(나) 동전의 뒷면이 나오면 점 Q가 음의 방향으로 1만큼 이동한다.

동전을 30번 던진 후 두 점 P, Q 사이의 거리가 46일 때, 동전의 앞면이 나온 횟수는? [4점]

① 12 ② 13 ③ 14 ④ 15 ⑤ 16

13. **[출제의도] 다항식의 인수분해를 이해하여 조건을 만족시키는 값을 구한다.**

$$2x^2+9x+k=(2x+a)(x+b)$$
$$=2x^2+(a+2b)x+ab$$

에서 $a+2b=9$, $k=ab$

a, b는 자연수이므로 가능한 a, b, k의 값은 다음 표와 같다.

a	b	k
7	1	7
5	2	10
3	3	9
1	4	4

따라서 실수 k의 최솟값은 4

14. **[출제의도] 일차방정식을 이용하여 실생활 문제를 해결한다.**

동전을 30번 던질 때, 앞면이 나온 횟수를 n이라 하면 뒷면이 나온 횟수는 $30-n$이다.

두 조건 (가), (나)에서 두 점 P, Q의 위치는 각각 $\mathrm{P}(2n)$, $\mathrm{Q}(n-30)$

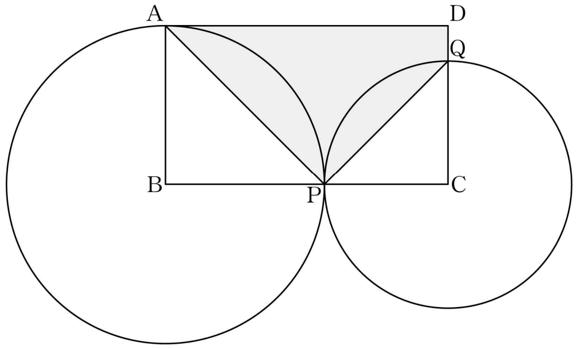
이때, 두 점 P, Q 사이의 거리가 46이므로

$2n-(n-30)=n+30=46$

$n=16$

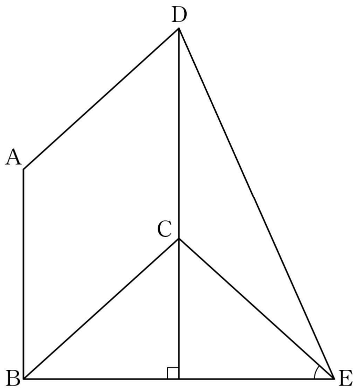
따라서 동전의 앞면이 나온 횟수는 16

15. 그림과 같이 $\overline{AB}=a\ (4<a<8)$, $\overline{BC}=8$인 직사각형 ABCD가 있다. 점 B를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원이 선분 BC와 만나는 점을 P, 점 C를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원이 선분 CD와 만나는 점을 Q라 하자. 사각형 APQD의 넓이가 $\frac{79}{4}$일 때, a의 값은? [4점]



① $\frac{25}{6}$ ② $\frac{13}{3}$ ③ $\frac{9}{2}$ ④ $\frac{14}{3}$ ⑤ $\frac{29}{6}$

16. 그림과 같이 마름모 ABCD와 이 마름모의 외부의 한 점 E에 대하여 $\angle ADE=72°$이고 직선 CD가 선분 BE를 수직이등분할 때, 각 CEB의 크기는? (단, $0°<\angle ADC<72°$) [4점]



① 39° ② 40° ③ 41° ④ 42° ⑤ 43°

15. [출제의도] 이차방정식을 이해하여 주어진 선분의 길이를 구한다.

점 B를 중심으로 하고 점 A를 지나는 원의 반지름의 길이가 $\overline{AB}$이므로

$\overline{BP}=a$, $\overline{PC}=8-a$

점 C를 중심으로 하고 점 P를 지나는 원의 반지름의 길이가 $\overline{PC}$이므로

$\overline{CQ}=\overline{PC}=8-a$

$\triangle ABP=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times\overline{BP}=\frac{1}{2}a^2$

$\triangle PCQ=\frac{1}{2}\times\overline{PC}\times\overline{CQ}=\frac{1}{2}(8-a)^2$

$\square ABCD=8a$이므로

$$\begin{aligned}\square APQD&=\square ABCD-\triangle ABP-\triangle PCQ\\&=8a-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}(8-a)^2\\&=8a-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}\left(a^2-16a+64\right)\\&=8a-\frac{1}{2}a^2-\frac{1}{2}a^2+8a-32\\&=-a^2+16a-32\\&=\frac{79}{4}\end{aligned}$$

$-4a^2+64a-128-79=0$

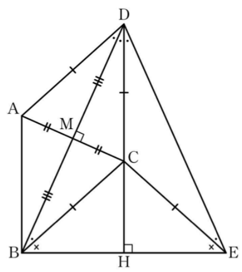
$4a^2-64a+207=0$

$(2a-9)(2a-23)=0$

$a=\frac{9}{2}$ 또는 $a=\frac{23}{2}$

$4<a<8$이므로 $a=\frac{9}{2}$

16. [출제의도] 평면도형의 성질을 이해하여 각의 크기를 구한다.



사각형 ABCD는 마름모이므로 두 대각선 AC와 BD는 서로의 수직이등분선이다.

두 대각선 AC와 BD가 만나는 점을 M이라 하면

$\overline{AM}=\overline{MC}$, $\overline{BM}=\overline{MD}$

$\angle AMB=\angle CMB=\angle CMD=\angle AMD=90°$

이므로 네 삼각형 AMB, CMB, CMD, AMD는 서로 합동이다.

$\angle ADB=\angle CDB$ …… ㉠

직선 CD와 선분 BE가 만나는 점을 H라 하자.

세 점 C, D, H는 선분 BE의 수직이등분선 위의 점이므로

$\overline{BD}=\overline{ED}$, $\overline{BC}=\overline{EC}$, $\overline{BH}=\overline{EH}$

두 삼각형 BCD, ECD에서

$\overline{BD}=\overline{ED}$, $\overline{BC}=\overline{EC}$이고 선분 CD는 공통이므로

두 삼각형 BCD, ECD는 합동인 이등변삼각형이다.

$\angle CBD=\angle CED=\angle CDB=\angle CDE$ …… ㉡

$\angle ADE=\angle ADB+\angle CDB+\angle CDE=72°$

㉠, ㉡에서

$\angle ADB=\angle CDB=\angle CDE=\angle CED=24°$

$\overline{BC}=\overline{EC}$, $\overline{BH}=\overline{EH}$이고 선분 CH는 공통이므로

두 삼각형 BCH, ECH는 서로 합동이다.

$\angle CEB=\angle CEH=\angle CBH$

$\angle CDE=\angle EDH=24°$, $\angle BED=\angle DEH$이고

삼각형 DHE의 세 내각의 크기의 합은 180°이므로

$\angle EDH+\angle DEH+\angle DHE$

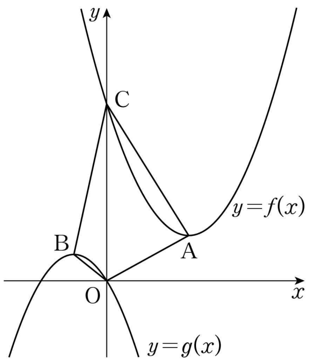
$=\angle EDH+(\angle CED+\angle CEB)+\angle DHE$

$=24°+(24°+\angle CEB)+90°=180°$

따라서 $\angle CEB=42°$

17. 두 이차함수 $f(x)=ax^2-4ax+5a+1$, $g(x)=-x^2-2ax$ 의 그래프의 꼭짓점을 각각 A, B라 하자. 이차함수 $y=f(x)$의 그래프가 y축과 만나는 점 C에 대하여 사각형 OACB의 넓이가 7일 때, 양수 a의 값은? (단, O는 원점이다.) [4점]

① $\frac{2}{5}$ ② $\frac{1}{2}$ ③ $\frac{3}{5}$ ④ $\frac{7}{10}$ ⑤ $\frac{4}{5}$



17. **[출제의도] 이차함수의 그래프를 이해하여 주어진 조건을 만족시키는 상수의 값을 구한다.**

$f(x)=ax^2-4ax+5a+1$

$\quad =a(x-2)^2+a+1$

이므로 점 A의 좌표는 $(2,\ a+1)$

$g(x)=-x^2-2ax$

$\quad =-(x+a)^2+a^2$

이므로 점 B의 좌표는 $(-a,\ a^2)$

$f(x)=ax^2-4ax+5a+1$ 에 $x=0$ 을 대입하면

$f(0)=a\times 0^2-4a\times 0+5a+1$

$\quad =5a+1$

이므로 점 C의 좌표는 $(0,\ 5a+1)$

$\square\mathrm{OACB}=\triangle\mathrm{OAC}+\triangle\mathrm{OCB}$

$\quad =\frac{(5a+1)\times 2}{2}+\frac{(5a+1)\times a}{2}$

$\quad =\frac{(5a+1)(2+a)}{2}=7$

$(5a+1)(2+a)=14$

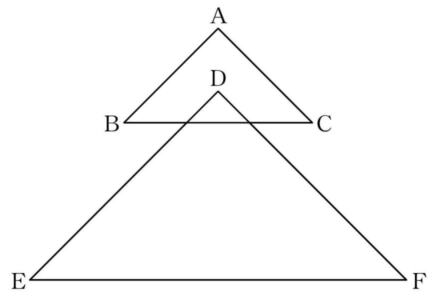
$5a^2+11a-12=0$

$(5a-4)(a+3)=0$

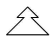
$a=\frac{4}{5}$ 또는 $a=-3$

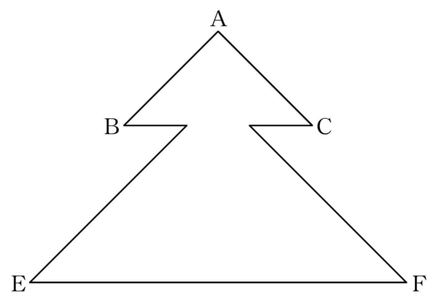
$a>0$ 이므로 $a=\frac{4}{5}$

18. [그림1]과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{CAB}=90^\circ$ 인 삼각형 ABC의 무게중심 D에 대하여 $\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DF}}=2\sqrt{2}$, $\angle\mathrm{FDE}=90^\circ$ 이고 $\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{EF}}$ 인 삼각형 DEF가 있다.



[그림1]

[그림2]와 같이 두 삼각형 ABC와 DEF로 만들어지는  모양 도형의 둘레의 길이는? (단, 점 A는 삼각형 DEF의 외부에 있다.) [4점]

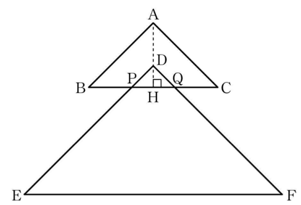


[그림2]

① $\frac{16+16\sqrt{2}}{3}$ ② $\frac{17+16\sqrt{2}}{3}$ ③ $\frac{16+17\sqrt{2}}{3}$

④ $\frac{17+17\sqrt{2}}{3}$ ⑤ $\frac{18+17\sqrt{2}}{3}$

18. **[출제의도] 삼각형의 무게중심의 성질을 이해하여 주어진 도형의 둘레의 길이를 구한다.**



선분 BC가 두 선분 DE, DF와 만나는 점을 각각 P, Q라 하자.

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}$ 이고 $\angle\mathrm{CAB}=90^\circ$ 이므로

$\angle\mathrm{ABC}=\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$

$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DF}}$ 이고 $\angle\mathrm{FDE}=90^\circ$ 이므로

$\angle\mathrm{DEF}=\angle\mathrm{DFE}=45^\circ$

$\overline{\mathrm{BC}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{EF}}$ 이므로

$\angle\mathrm{DPQ}=\angle\mathrm{DEF}=45^\circ$ (동위각)

$\angle\mathrm{DQP}=\angle\mathrm{DFE}=45^\circ$ (동위각)

삼각형 ABC와 삼각형 DPQ는 서로 닮은 도형이다.

선분 BC의 중점을 H라 하자.

점 D가 삼각형 ABC의 무게중심이므로

점 D는 선분 AH 위에 있다.

삼각형 ABC가 이등변삼각형이므로

선분 AH와 선분 BC는 서로 수직이다.

무게중심의 성질에 의해 $\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{DH}}=2:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{AH}}:\overline{\mathrm{DH}}=3:1$

두 삼각형 ABC, DPQ의 닮음비는 $3:1$ 이므로

$\overline{\mathrm{BC}}:\overline{\mathrm{PQ}}=3:1$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{BC}}=2$

따라서

$\overline{\mathrm{PQ}}=\frac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{PH}}=\overline{\mathrm{HQ}}$ 이므로

$\overline{\mathrm{BP}}=\overline{\mathrm{QC}}$

$\quad =\frac{1}{2}\times\left(2-\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3}$

$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{AC}}=\sqrt{2}$ 이고 두 삼각형 ABC, DPQ의 닮음비가 $3:1$ 이므로

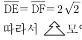
$\overline{\mathrm{DP}}=\overline{\mathrm{DQ}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{PE}}=\overline{\mathrm{DE}}-\overline{\mathrm{DP}}$

$\quad =2\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

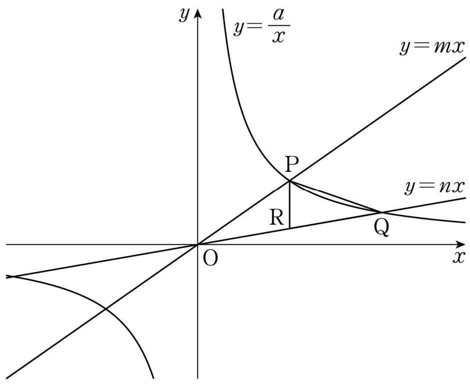
같은 방법으로 $\overline{\mathrm{QF}}=\frac{5\sqrt{2}}{3}$

$\overline{\mathrm{DE}}=\overline{\mathrm{DF}}=2\sqrt{2}$ 이므로 피타고라스 정리에 의해 $\overline{\mathrm{EF}}=4$

따라서 모양 도형의 둘레의 길이는

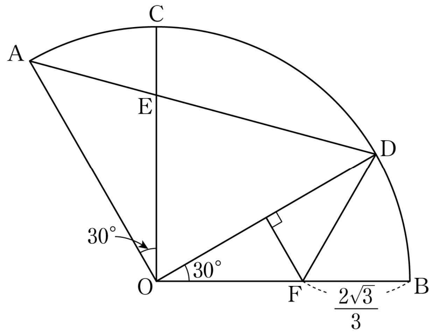
$2\left(\sqrt{2}+\frac{2}{3}+\frac{5\sqrt{2}}{3}\right)+4=\frac{16+16\sqrt{2}}{3}$

19. 그림과 같이 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}\,(a>0)$의 그래프가 두 정비례 관계 $y=mx$, $y=nx$의 그래프와 제1사분면에서 만나는 점을 각각 P, Q라 하자. 점 P를 지나고 y축과 평행한 직선이 정비례 관계 $y=nx$의 그래프와 만나는 점 R에 대하여 삼각형 PRQ의 넓이가 $\dfrac{3}{2}$이다. 점 Q의 x좌표가 점 P의 x좌표의 2배일 때, 실수 a의 값은? (단, $m>n>0$) [4점]



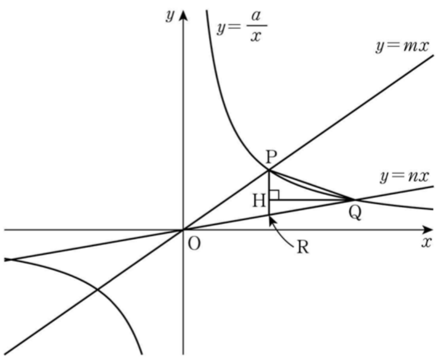
① 1　② 2　③ 3　④ 4　⑤ 5

20. 그림과 같이 중심이 O이고 중심각의 크기가 120°인 부채꼴 OAB가 있다. ∠AOC = ∠DOB = 30°인 호 AB 위의 두 점 C, D에 대하여 선분 OC와 선분 AD가 만나는 점을 E라 하자. 선분 OD의 수직이등분선과 선분 OB가 만나는 점 F에 대하여 $\overline{\text{BF}}=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$일 때, 삼각형 ODE의 넓이는? [4점]



① $\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$　② $\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$　③ $\dfrac{3+2\sqrt{3}}{2}$
④ $2+\sqrt{3}$　⑤ $\dfrac{3+3\sqrt{3}}{2}$

19. [출제의도] 정비례 관계, 반비례 관계를 이해하여 상수의 값을 구한다.



점 R의 좌표를 (p, q)라 하면 점 P의 x좌표는 p이다.
두 점 R, Q는 정비례 관계 $y=nx$의 그래프 위의 점이고, 점 Q의 x좌표가 점 R의 x좌표의 2배이므로 점 Q의 좌표는 $(2p, 2q)$이다.
두 점 P, Q는 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이고, 점 P의 x좌표가 점 Q의 x좌표의 $\dfrac{1}{2}$배이므로 점 P의 y좌표는 점 Q의 y좌표의 2배이다.
그러므로 점 P의 좌표는 $(p, 4q)$이다.
점 Q에서 선분 RP에 내린 수선의 발을 H라 하면

$\overline{\text{QH}}=2p-p=p$

$\overline{\text{RP}}=4q-q=3q$

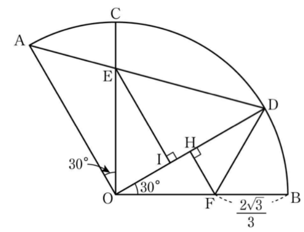
$\triangle\text{PRQ}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{RP}}\times\overline{\text{QH}}$
$=\dfrac{1}{2}\times 3q\times p$
$=\dfrac{3}{2}pq$

$\triangle\text{PRQ}=\dfrac{3}{2}$이므로 $pq=1$

점 $\text{P}(p, 4q)$는 반비례 관계 $y=\dfrac{a}{x}$의 그래프 위의 점이므로 $4q=\dfrac{a}{p}$, $a=4pq$

따라서 $a=4$

20. [출제의도] 삼각비를 이용하여 삼각형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.



점 F에서 선분 OD에 내린 수선의 발을 H라 하자.
$\overline{\text{OF}}=x$라 하면

직각삼각형 OFH에서 $\cos 30^\circ=\dfrac{\overline{\text{OH}}}{\overline{\text{OF}}}$이므로

$\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\overline{\text{OH}}}{x}$

$\overline{\text{OH}}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}x$

부채꼴 OAB의 반지름의 길이를 r라 하면
$r=2\overline{\text{OH}}=\sqrt{3}x$이므로

$r=\overline{\text{OF}}+\overline{\text{BF}}$
$=x+\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$
$=\sqrt{3}x$

$(\sqrt{3}-1)x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3}$

$x=\dfrac{2\sqrt{3}}{3(\sqrt{3}-1)}$
$=\dfrac{2\sqrt{3}(\sqrt{3}+1)}{3(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}$
$=\dfrac{2\times 3+2\sqrt{3}}{3\times 2}$
$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$

$r=\sqrt{3}x$
$=\sqrt{3}\times\dfrac{3+\sqrt{3}}{3}$
$=\dfrac{3\sqrt{3}+3}{3}$
$=\sqrt{3}+1$

점 E에서 선분 OD에 내린 수선의 발을 I라 하고 $\overline{\text{OI}}=y$라 하면

$\angle\text{EOI}=\angle\text{AOB}-\angle\text{AOC}-\angle\text{DOB}$
$=120^\circ-30^\circ-30^\circ=60^\circ$

직각삼각형 EOI에서

$\tan(\angle\text{EOI})=\tan 60^\circ$
$=\dfrac{\overline{\text{EI}}}{\overline{\text{OI}}}$
$=\dfrac{\overline{\text{EI}}}{y}$

$\overline{\text{EI}}=y\times\tan 60^\circ$
$=\sqrt{3}y$

$\overline{\text{OA}}=\overline{\text{OD}}$인 이등변삼각형 AOD에서

$\angle\text{AOD}=\angle\text{AOC}+\angle\text{COD}$
$=\angle\text{AOC}+\angle\text{EOI}$
$=30^\circ+60^\circ=90^\circ$

이므로 삼각형 AOD가 직각삼각형이다.
그러므로 $\angle\text{EDI}=\angle\text{ADO}=45^\circ$

$\tan(\angle\text{EDI})=\tan 45^\circ$
$=\dfrac{\overline{\text{EI}}}{\overline{\text{DI}}}$
$=\dfrac{\sqrt{3}y}{\overline{\text{DI}}}$

$\overline{\text{DI}}=\sqrt{3}y\times\dfrac{1}{\tan 45^\circ}$
$=\sqrt{3}y$

$\overline{\text{OD}}=\overline{\text{OI}}+\overline{\text{DI}}$
$=y+\sqrt{3}y$
$=(\sqrt{3}+1)y$

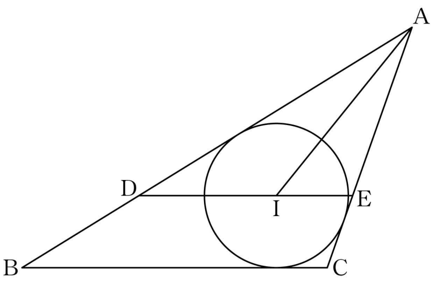
$\sqrt{3}+1=(\sqrt{3}+1)y$

$y=1$

따라서

$\triangle\text{ODE}=\dfrac{1}{2}\times\overline{\text{OD}}\times\overline{\text{EI}}$
$=\dfrac{1}{2}\times r\times\sqrt{3}y$
$=\dfrac{1}{2}\times(\sqrt{3}+1)\times\sqrt{3}$
$=\dfrac{3+\sqrt{3}}{2}$

21. 그림과 같이 삼각형 ABC의 내심 I를 지나고 선분 BC에 평행한 직선이 두 선분 AB, AC와 만나는 점을 각각 D, E라 하자. $\overline{AI}=3$이고, 삼각형 ABC의 내접원의 반지름의 길이가 1이다. 삼각형 ABC의 넓이가 $5\sqrt{2}$일 때, <보기>에서 옳은 것만을 있는 대로 고른 것은? [4점]



< 보 기 >

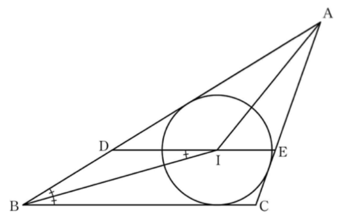
ㄱ. $\angle BID=\angle IBD$

ㄴ. 삼각형 ADE의 둘레의 길이는 $7\sqrt{2}$이다.

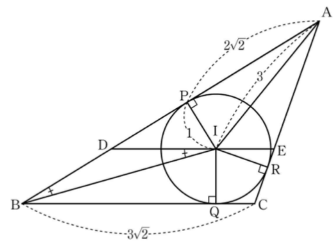
ㄷ. $\overline{DE}=2\sqrt{2}$

① ㄱ　　② ㄱ, ㄴ　　③ ㄱ, ㄷ
④ ㄴ, ㄷ　　⑤ ㄱ, ㄴ, ㄷ

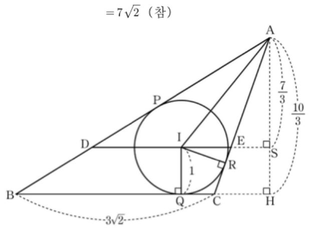
21. **[출제의도] 삼각형의 내심의 성질과 피타고라스 정리를 이용하여 참, 거짓을 추론한다.**



ㄱ. 직선 DE와 직선 BC가 평행하므로
$\angle IBC=\angle BID$ (엇각)
점 I가 삼각형 ABC의 내심이므로 $\angle IBC=\angle IBD$
가 되어 $\angle BID=\angle IBD$ (참)



ㄴ. $\angle BID=\angle IBD$이므로
삼각형 DBI는 $\overline{DB}=\overline{DI}$인 이등변삼각형이다.
그러므로
$\overline{AB}=\overline{AD}+\overline{DB}$
$=\overline{AD}+\overline{DI}$
같은 방법으로 $\overline{CA}=\overline{IE}+\overline{EA}$
$\overline{DE}=\overline{DI}+\overline{IE}$이므로
삼각형 ADE의 둘레의 길이는
$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EA}=\overline{AD}+(\overline{DI}+\overline{IE})+\overline{EA}$
$=(\overline{AD}+\overline{DI})+(\overline{IE}+\overline{EA})$
$=\overline{AB}+\overline{CA}$
점 I에서 세 선분 AB, BC, CA에 내린 수선의 발을 각각 P, Q, R라 하면 피타고라스 정리에 의해
$\overline{AP}=\sqrt{3^2-1^2}$
$=2\sqrt{2}$
$\overline{AP}$, $\overline{RA}$는 점 A에서 내접원에 그은 접선이므로
$\overline{AP}=\overline{RA}$
같은 방법으로 $\overline{PB}=\overline{BQ}$, $\overline{QC}=\overline{CR}$
$\triangle ABC=\triangle ABI+\triangle BCI+\triangle CAI$
$=\frac{1}{2}\times\overline{AB}\times1+\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times1+\frac{1}{2}\times\overline{CA}\times1$
$=\frac{1}{2}\times(\overline{AB}+\overline{BC}+\overline{CA})$
$=\frac{1}{2}\times(\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{BQ}+\overline{QC}+\overline{CR}+\overline{RA})$
$=\frac{1}{2}\times(4\sqrt{2}+2\overline{PB}+2\overline{CR})$
$=2\sqrt{2}+\overline{PB}+\overline{CR}$
$=5\sqrt{2}$
$\overline{PB}+\overline{CR}=3\sqrt{2}$
그러므로 삼각형 ADE의 둘레의 길이는
$\overline{AD}+\overline{DE}+\overline{EA}=\overline{AB}+\overline{CA}$
$=\overline{AP}+\overline{PB}+\overline{CR}+\overline{RA}$
$=4\sqrt{2}+\overline{PB}+\overline{CR}$
$=4\sqrt{2}+3\sqrt{2}$
$=7\sqrt{2}$ (참)



ㄷ. $\overline{PB}=\overline{BQ}$, $\overline{QC}=\overline{CR}$이므로
$\overline{BC}=\overline{BQ}+\overline{QC}$
$=\overline{PB}+\overline{CR}$
$=3\sqrt{2}$
점 A에서 직선 BC에 내린 수선의 발을 H라 하면
$\triangle ABC=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{AH}$
$=\frac{1}{2}\times3\sqrt{2}\times\overline{AH}$
$=5\sqrt{2}$
이므로 $\overline{AH}=\frac{10}{3}$
직선 DE와 선분 AH가 만나는 점을 S라 하면
$\angle BQI=\angle BHA=90^\circ$이므로
두 직선 IQ와 AH는 서로 평행하다.
직선 BC와 직선 DE가 평행하므로 사각형 IQHS가 평행사변형이 되어
$\overline{SH}=\overline{IQ}=1$
$\overline{AS}=\overline{AH}-\overline{SH}$
$=\frac{10}{3}-1$
$=\frac{7}{3}$
$\angle BAC$는 공통, $\angle ADE=\angle ABC$ (동위각)
이므로 두 삼각형 ABC, ADE는 서로 닮은 도형이고 닮음비는
$\frac{10}{3}:\frac{7}{3}=10:7$
그러므로
$\overline{DE}=\frac{7}{10}\times\overline{BC}$
$=\frac{7}{10}\times3\sqrt{2}$
$=\frac{21}{10}\sqrt{2}$ (거짓)
따라서 옳은 것은 ㄱ, ㄴ이다.

단답형

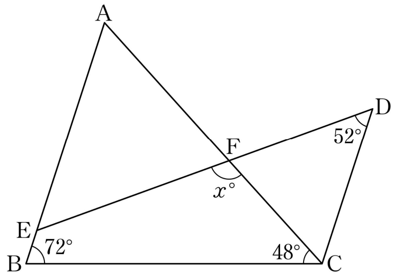
22. 이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 한 근이 $x=3$일 때, 상수 a의 값을 구하시오. [3점]

22. **[출제의도] 이차방정식의 근을 이용하여 상수의 값을 계산한다.**
이차방정식 $x^2-2ax+5a=0$의 한 근이 $x=3$이므로
$x^2-2ax+5a=0$에 $x=3$을 대입하면
$9-6a+5a=0$
$9-a=0$
따라서 $a=9$

23. 연립일차방정식 $\begin{cases} x-y=4 \\ 2x+y=11 \end{cases}$의 해가 $x=a,\ y=b$일 때, $a+b$의 값을 구하시오. [3점]

23. **[출제의도] 연립일차방정식의 해를 계산한다.**
연립일차방정식
$\begin{cases} x-y=4 & \cdots\cdots ㉠ \\ 2x+y=11 & \cdots\cdots ㉡ \end{cases}$
에서 ㉠과 ㉡을 변끼리 더하면
$3x=15$
$x=5$
$x=5$를 ㉠에 대입하면
$5-y=4$
$y=1$
이므로 구하는 연립일차방정식의 해는
$x=5,\ y=1$
이므로 $a=5,\ b=1$
따라서 $a+b=5+1=6$

24. 그림과 같이 $\angle B=72°$, $\angle C=48°$인 삼각형 ABC가 있다. 점 C를 지나고 직선 AB에 평행한 직선 위의 점 D와 선분 AB 위의 점 E에 대하여 $\angle CDE=52°$이다. 선분 DE와 선분 AC의 교점을 F라 할 때, $\angle EFC=x°$이다. x의 값을 구하시오. (단, $\angle BCD>90°$이고, 점 E는 점 A가 아니다.) [3점]



25. 한 개의 주사위를 두 번 던져서 나오는 눈의 수를 차례로 a, b라 할 때, $a+b$가 14의 약수가 되도록 하는 모든 순서쌍 (a, b)의 개수를 구하시오. [3점]

25. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 경우의 수를 구하는 문제를 해결한다.

14의 약수는 1, 2, 7, 14이다.

a, b는 1 이상 6 이하의 자연수이므로 14의 약수 중 $a+b$의 값으로 가능한 것은 2 또는 7이다.

(i) $a+b=2$인 경우

$a=1$이면 $b=1$

이므로 가능한 순서쌍의 개수는 $(1, 1)$의 1

(ii) $a+b=7$인 경우

$a=1$이면 $b=6$

$a=2$이면 $b=5$

$a=3$이면 $b=4$

$a=4$이면 $b=3$

$a=5$이면 $b=2$

$a=6$이면 $b=1$

이므로 가능한 순서쌍의 개수는

$(1, 6)$, $(2, 5)$, $(3, 4)$, $(4, 3)$, $(5, 2)$, $(6, 1)$의 6

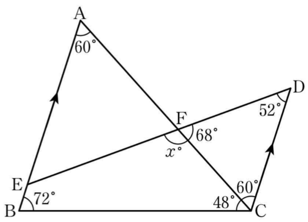
(i), (ii)에서 가능한 모든 순서쌍 (a, b)의 개수는

$1+6=7$

26. 세 실수 a, b, c에 대하여 다음 자료의 중앙값이 6.5, 평균이 6, 최빈값이 c일 때, $a+b+c$의 값을 구하시오. [4점]

9, 5, 6, 4, 8, 1, a, b

24. [출제의도] 평면도형의 성질을 이해하여 각의 크기를 구한다.



삼각형 ABC의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle A+\angle B+\angle C=180°$

$\angle B=72°$, $\angle C=48°$이므로

$\angle A=180°-72°-48°$

$=60°$

한편, 두 선분 AB와 DC가 서로 평행하므로

$\angle ACD=\angle A=60°$ (엇각)

삼각형 CDF의 세 내각의 크기의 합이 180°이므로

$\angle FCD+\angle CDF+\angle DFC=180°$

$\angle DFC=180°-60°-52°$

$=68°$

$\angle EFC=180°-\angle DFC$

$=180°-68°$

$=112°$

따라서 $x=112$

26. [출제의도] 중앙값, 평균의 의미를 이해하여 자료의 변량을 추론하고 그 최빈값을 구한다.

두 실수 a, b에 대하여 $a\leq b$라 하자.

a, b를 제외한 자료의 값을 크기순으로 정렬하면

1, 4, 5, 6, 8, 9

중앙값인 6.5보다 작은 값의 개수는 1, 4, 5, 6의 4이고 변량의 개수가 8이므로 a와 b는 모두 6.5보다 크다.

변량의 개수가 짝수이고 중앙값이 6.5이므로

$6.5=\dfrac{6+a}{2}$

$a=7$

평균이 6이므로

$\dfrac{1+4+5+6+7+8+9+b}{8}=\dfrac{40+b}{8}$

$=6$

$40+b=48$

$b=8$

자료의 값을 크기순으로 정렬하면

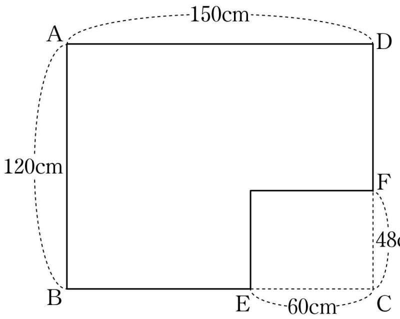
1, 4, 5, 6, 7, 8, 8, 9

이므로 최빈값은 8이다.

$c=8$

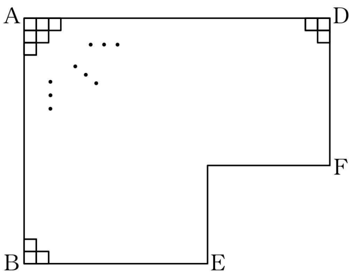
따라서 $a+b+c=7+8+8=23$

27. 가로의 길이가 150cm, 세로의 길이가 120cm인 직사각형 ABCD 모양의 종이가 있다. [그림1]과 같이 $\overline{\mathrm{CE}}=60\,\mathrm{cm}$인 선분 BC 위의 점 E와 $\overline{\mathrm{CF}}=48\,\mathrm{cm}$인 선분 CD 위의 점 F에 대하여 두 선분 CE, CF를 변으로 하는 직사각형 모양의 종이를 잘라내고 남은  모양의 종이를 만들었다.



[그림1]

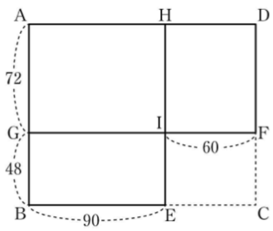
[그림2]와 같이  모양의 종이의 내부에 한 변의 길이가 자연수이고 모두 합동인 정사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않고 빈틈없이 붙이려고 할 때, 붙일 수 있는 종이의 개수의 최솟값을 구하시오. [4점]



[그림2]

28. $p<q$인 두 소수 p, q에 대하여 $p^2q<n\le pq^2$을 만족시키는 자연수 n의 개수가 308일 때, $p+q$의 값을 구하시오. [4점]

27. [출제의도] 소인수분해를 이용하여 실생활 문제를 해결한다.



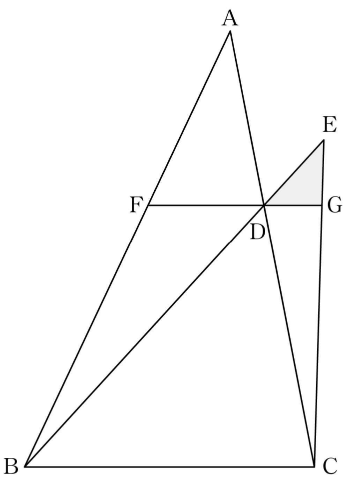
그림과 같이 선분 AB에 수직이고 점 F를 지나는 직선이 선분 AB와 만나는 점을 G,
선분 BC에 수직이고 점 E를 지나는 직선이 선분 DA와 만나는 점을 H,
두 선분 GF와 EH가 만나는 점을 I라 하자.
직사각형 AGIH의 내부에 정사각형을 서로 겹치지 않고 빈틈없이 붙이려면 붙이는 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이가 두 선분 AG, GI의 길이의 공약수가 되어야 한다.
이때 붙이는 정사각형 모양의 종이의 개수가 최소가 되기 위해서는 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이가 두 선분 AG, GI의 길이의 최대공약수가 되어야 한다.
같은 방법으로 직사각형 GBEI의 내부에 정사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않고 빈틈없이 붙일 때, 붙이는 종이의 개수가 최소가 되기 위해서는 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이가 두 선분 GB, BE의 길이의 최대공약수가 되어야 한다.
같은 방법으로 직사각형 HIFD의 내부에 정사각형 모양의 종이를 서로 겹치지 않고 빈틈없이 붙일 때, 붙이는 종이의 개수가 최소가 되기 위해서는 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이가 두 선분 HI, IF의 길이의 최대공약수가 되어야 한다.

$\overline{\mathrm{AG}}=72$, $\overline{\mathrm{GI}}=90$에서
$72=2^3\times3^2$
$90=2\times3^2\times5$
이므로
72와 90의 최대공약수는 $2\times3^2=18$
$\overline{\mathrm{GB}}=48$, $\overline{\mathrm{BE}}=90$에서
$48=2^4\times3$
$90=2\times3^2\times5$
이므로
48과 90의 최대공약수는 $2\times3=6$
$\overline{\mathrm{HI}}=72$, $\overline{\mathrm{IF}}=60$에서
$72=2^3\times3^2$
$60=2^2\times3\times5$
이므로
72과 60의 최대공약수는 $2^2\times3=12$
세 직사각형 AGIH, GBEI, HIFD에 합동인 정사각형 모양의 종이를 붙여야 하므로 한 변의 길이는 18, 6, 12의 공약수가 되어야 한다.
이때  모양의 종이의 내부에 붙이는 정사각형 모양의 종이의 개수가 최소가 되기 위해서는 정사각형 모양의 종이의 한 변의 길이가 18, 6, 12의 최대공약수 6이 되어야 한다.
그러므로 붙이는 정사각형 모양의 종이 1개의 넓이는 $6^2=36$
$(\square\mathrm{AGIH}+\square\mathrm{GBEI}+\square\mathrm{HIFD})\div36$
$=(72\times90+48\times90+72\times60)\div36=420$
따라서 붙일 수 있는 종이의 개수의 최솟값은 420

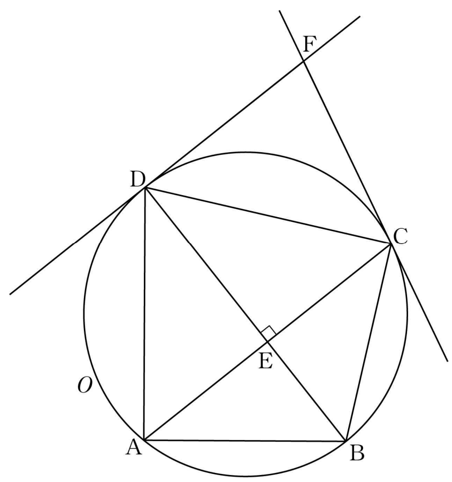
28. [출제의도] 주어진 조건을 만족시키는 자연수의 개수를 추론한다.

$p^2q<n\le pq^2$을 만족시키는 자연수 n의 개수는
pq^2-p^2q이므로
$pq^2-p^2q=pq(q-p)=308$
$p<q$이므로 $q-p>0$이고 p, q가 자연수이므로
$q-p$도 자연수이다.
$p<q$이고 $q-p<q$이므로
세 자연수 p, q, $q-p$ 중 q가 가장 큰 자연수이다.
308을 소인수분해하면
$308=2^2\times7\times11$
q는 308의 가장 큰 소인수이므로 $q=11$
p는 308의 소인수이고 $p<q$이므로 $p=2$ 또는 $p=7$
(ⅰ) $p=2$인 경우
$pq(q-p)=2\times11\times(11-2)=198$
(ⅱ) $p=7$인 경우
$pq(q-p)=7\times11\times(11-7)=308$
(ⅰ), (ⅱ)에 의하여 $pq(q-p)=308$일 때
$p=7$, $q=11$
따라서 $p+q=18$

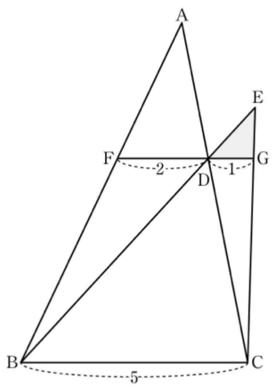
29. 그림과 같이 삼각형 ABC의 선분 AC 위의 점 D와 직선 BD 위의 점 E에 대하여 $\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{DA}}:\overline{\mathrm{DB}}=1:2:4$이다. 점 D를 지나고 직선 BC와 평행한 직선이 두 선분 AB, EC와 만나는 점을 각각 F, G라 할 때, $\overline{\mathrm{FD}}=2$, $\overline{\mathrm{DG}}=1$이고 삼각형 AFD의 넓이가 3이다. 삼각형 EDG의 넓이가 $\frac{q}{p}$일 때, $p+q$의 값을 구하시오. (단, 점 E는 삼각형 ABC의 외부에 있고, p와 q는 서로소인 자연수이다.) [4점]



30. 그림과 같이 $\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{BC}}=2$인 삼각형 ABC에 외접하는 원 O가 있다. 점 B를 지나고 직선 AC에 수직인 직선이 원 O와 만나는 점 중 B가 아닌 점을 D, 선분 AC와 선분 BD가 만나는 점을 E라 하자. 원 O 위의 점 C에서의 접선과 점 D에서의 접선이 만나는 점을 F라 할 때, $\overline{\mathrm{FD}}=2$이다. $\overline{\mathrm{AE}}=\frac{a+b\sqrt{17}}{2}$일 때, a^2+b^2의 값을 구하시오. (단, a, b는 정수이다.) [4점]



29. **[출제의도] 삼각형의 닮음을 이용하여 도형의 넓이를 구하는 문제를 해결한다.**

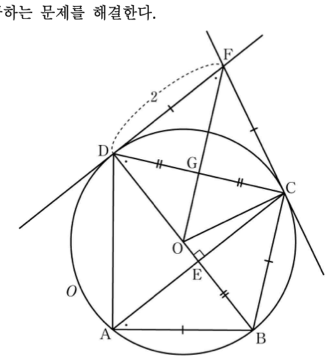


두 삼각형 EDG, EBC에서 $\overline{\mathrm{DG}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로
두 삼각형 EDG, EBC는 서로 닮은 도형이다.
$\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{DB}}=1:4$이므로
$\overline{\mathrm{DE}}:\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{DG}}:\overline{\mathrm{BC}}=1:5$
$\overline{\mathrm{BC}}=5$
$\overline{\mathrm{BD}}:\overline{\mathrm{BE}}=4:5$ …… ㉠
두 삼각형 EDG와 EBC의 닮음비가 $1:5$이므로
넓이의 비는 $1^2:5^2=1:25$이고
$\triangle\mathrm{EBC}=25\times\triangle\mathrm{EDG}$
㉠에서

$$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{4}{5}\times\triangle\mathrm{EBC}=\frac{4}{5}\times(25\times\triangle\mathrm{EDG})=20\times\triangle\mathrm{EDG}$$

두 삼각형 AFD, ABC에서 $\overline{\mathrm{FD}}\,/\!/\,\overline{\mathrm{BC}}$이므로
두 삼각형 AFD, ABC는 서로 닮은 도형이다.
$\overline{\mathrm{FD}}:\overline{\mathrm{BC}}=2:5$이므로
$\overline{\mathrm{AD}}:\overline{\mathrm{AC}}=2:5$
$\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{AC}}=3:5$ …… ㉡
두 삼각형 AFD와 ABC의 닮음비가 $2:5$이므로
넓이의 비는 $2^2:5^2=4:25$이고
$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{25}{4}\times\triangle\mathrm{AFD}=\frac{75}{4}$이다.
㉡에서
$\triangle\mathrm{BCD}=\frac{3}{5}\times\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3}{5}\times\frac{75}{4}=\frac{45}{4}$
삼각형 BCD의 넓이는 $20\times\triangle\mathrm{EDG}=\frac{45}{4}$이므로
$\triangle\mathrm{EDG}=\frac{9}{16}$
$p=16$, $q=9$
따라서 $p+q=16+9=25$

30. **[출제의도] 원의 성질을 이용하여 선분의 길이를 구하는 문제를 해결한다.**



$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{CB}}$, 선분 BE는 공통, $\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{CEB}=90°$이므로 두 삼각형 ABE, CBE는 서로 합동이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{AE}}=\overline{\mathrm{CE}}$
직선 BD는 삼각형 ABC의 변 AC의 수직이등분선이므로 외접원 O의 중심은 선분 BD 위에 있다.
원 O의 중심을 O, 선분 OF와 선분 CD가 만나는 점을 G라 하자.
원 O 외부의 점 F에서 원 O에 그은 두 접선의 길이는 같으므로 $\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{FD}}=2$
$\overline{\mathrm{FC}}=\overline{\mathrm{FD}}$, $\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OD}}$, $\angle\mathrm{OCF}=\angle\mathrm{ODF}=90°$이므로
두 삼각형 OCF, ODF는 서로 합동이다.
$\overline{\mathrm{OC}}=\overline{\mathrm{OD}}$, $\overline{\mathrm{OG}}$가 공통이고 $\angle\mathrm{COG}=\angle\mathrm{DOG}$이므로
두 삼각형 COG, DOG는 서로 합동이다.
$\overline{\mathrm{CD}}\perp\overline{\mathrm{OF}}$, $\overline{\mathrm{CG}}=\overline{\mathrm{DG}}$
그러므로 $\overline{\mathrm{CD}}=\overline{\mathrm{CG}}+\overline{\mathrm{DG}}=2\times\overline{\mathrm{DG}}$
각 BAC와 각 BDC는 호 BC에 대한 원주각이므로
$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BDC}$, 즉 $\angle\mathrm{BAE}=\angle\mathrm{EDC}$
$\angle\mathrm{ABE}=90°-\angle\mathrm{BAE}=90°-\angle\mathrm{EDC}=\angle\mathrm{FDG}$
$\overline{\mathrm{AB}}=\overline{\mathrm{FD}}=2$, $\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{FDG}$, $\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{FGD}=90°$
이므로 두 직각삼각형 ABE, FDG는 서로 합동이다.
그러므로 $\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{DG}}$
$\angle\mathrm{EAB}=\angle\mathrm{EDC}$, $\angle\mathrm{AEB}=\angle\mathrm{DEC}=90°$이므로
두 삼각형 ABE, DCE는 서로 닮음이다.
$\overline{\mathrm{AB}}:\overline{\mathrm{BE}}=\overline{\mathrm{DC}}:\overline{\mathrm{CE}}$에서
$\overline{\mathrm{BE}}\times\overline{\mathrm{DC}}=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CE}}$
$\overline{\mathrm{DC}}=2\times\overline{\mathrm{DG}}=2\times\overline{\mathrm{BE}}$이므로
$2\times\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CE}}$
직각삼각형 ABE에서 피타고라스 정리에 의하여
$\overline{\mathrm{AB}}^2=\overline{\mathrm{BE}}^2+\overline{\mathrm{AE}}^2$, 즉 $\overline{\mathrm{BE}}^2=\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AE}}^2$
$2\times\left(\overline{\mathrm{AB}}^2-\overline{\mathrm{AE}}^2\right)=\overline{\mathrm{AB}}\times\overline{\mathrm{CE}}$
$\overline{\mathrm{AE}}=x$라 하면
$\overline{\mathrm{CE}}=\overline{\mathrm{AE}}=x$이므로
$2(2^2-x^2)=2x$
$x^2+x-4=0$
$x=\frac{-1-\sqrt{17}}{2}$ 또는 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
$x>0$이므로 $x=\frac{-1+\sqrt{17}}{2}$
$a=-1$, $b=1$
따라서 $a^2+b^2=(-1)^2+1^2=2$

*** 확인 사항**

○ 답안지의 해당란에 필요한 내용을 정확히 기입(표기)했는지 확인하시오.